Método de Frobenius

Vamos continuar nossa investigação teórica do método de Frobenius. Consideremos a equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)\, y = 0,$$

onde $x_0 = 0$ é um ponto singular regular, isto é,

$$\lim_{x \to 0} xp(x) = p_0$$

e

$$\lim_{x \to 0} x^2 q(x) = q_0,$$

com p_0 e q_0 números finitos e, além disso, com $xp(x)$ e $x^2q(x)$ funções analíticas em $x_0 = 0$. Então, como vimos anteriormente,

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$$

e

$$x^2 q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n.$$

Vamos agora considerar o ansatz de Frobenius, propondo uma solução da equação diferencial da seguinte forma:

$$\begin{aligned} y &= x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, \end{aligned}$$

onde $a_0 \neq 0$, já que no limite em que $x \to 0$ a equação dada se aproxima da equação de Euler e r será uma das raízes da equação indicial, como veremos a seguir. Calculemos as derivadas de y :

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\, a_n x^{n+r-1}$$

e

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)\, a_n x^{n+r-2}.$$

Substituindo nossos resultados na equação diferencial dada, obtemos:

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)\, a_n x^{n+r} \\ &+xp(x) \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\, a_n x^{n+r} \\ &+x^2 q(x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0, \end{aligned}$$

onde multiplicamos tudo por x^2. Vamos agora usar as séries de Taylor de $xp(x)$ e $x^2 q(x)$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} \\
&+\sum_{m=0}^{\infty}p_m x^m\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r} \\
&+\sum_{m=0}^{\infty}q_m x^m\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r} = 0. \qquad (1)
\end{aligned}$$

A seguir reescrevemos esta equação colecionando os termos em ordem crescente de potências de x :

$$\begin{aligned}
&r(r-1)a_0x^r+(r+1)ra_1x^{r+1}+(r+2)(r+1)a_2x^{r+2}+\ldots \\
&+p_0ra_0x^r+p_0(r+1)a_1x^{r+1}+p_1ra_0x^{r+1} \\
&+p_0(r+2)a_2x^{r+2}+p_1(r+1)a_1x^{r+2}+p_2ra_0x^{r+2}\ldots \\
&+q_0a_0x^r+q_0a_1x^{r+1}+q_1a_0x^{r+1} \\
&+q_0a_2x^{r+2}+q_1a_1x^{r+2}+q_2a_0x^{r+2}+\ldots = 0,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
&[r(r-1)+p_0r+q_0]a_0x^r \\
&+[(r+1)ra_1+p_0(r+1)a_1+p_1ra_0+q_0a_1+q_1a_0]x^{r+1} \\
&+[(r+2)(r+1)a_2+p_0(r+2)a_2+p_1(r+1)a_1 \\
&+p_2ra_0+q_0a_2+q_1a_1+q_2a_0]x^{r+2}+\ldots = 0. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Vamos seguir o livro-texto e definir

$$F(r) \equiv r(r-1)+p_0r+q_0, \qquad (3)$$

de modo que

$$F(r+1) = r(r+1)+p_0(r+1)+q_0$$

e

$$F(r+2) = (r+1)(r+2)+p_0(r+2)+q_0.$$

Notando estas quantidades na Eq. (2), temos:

$$\begin{aligned}
&F(r)a_0x^r+[F(r+1)a_1+(p_1r+q_1)a_0]x^{r+1} \\
&+\{F(r+2)a_2+[p_1(r+1)+q_1]a_1+(p_2r+q_2)a_0\}x^{r+2}+\ldots = 0.
\end{aligned}$$

Como encontramos o coeficiente de x^{r+n}, que o livro-texto mostra? Para responder esta questão, notemos primeiro o seguinte:

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{\infty}p_m x^m\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r} &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)p_m a_n x^{m+n+r} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(j+r)p_m a_j x^{m+j+r},
\end{aligned}$$

que aparece na Eq. (1). Note que podemos reescrever este resultado assim:

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m x^m \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\, a_n x^{n+r} \quad = \quad \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (j+r)\, p_m a_j \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{m+j,n} x^{n+r},$$

onde

$$\delta_{m+j,n} \quad = \quad \begin{cases} 1, & \text{se } m+j=n, \\ 0, & \text{se } m+j \neq n \end{cases}$$

é a chamada delta de Kronecker.

Podemos ainda escrever:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} p_m x^m \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\, a_n x^{n+r} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{m+j,n} \,(n-m+r)\, p_m a_{n-m} x^{n+r} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \delta_{m+j,n} \,(n-m+r)\, p_m a_{n-m} x^{n+r} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \delta_{m,n-j} \,(n-m+r)\, p_m a_{n-m} x^{n+r} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \delta_{m,n-j} \,(n-m+r)\, p_m a_{n-m} x^{n+r} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} (j+r)\, p_{n-j} a_j x^{n+r}. \end{aligned} \tag{4}$$

De forma análoga, tomamos também

$$\sum_{m=0}^{\infty} q_m x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \quad = \quad \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} q_m a_j x^{m+j+r},$$

da Eq. (1). Assim,

$$
\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{\infty} q_m x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} q_m a_j \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{m+j,n} x^{n+r} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \delta_{m+j,n} q_m a_{n-m} x^{n+r} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty} \delta_{m+j,n} q_m a_{n-m} x^{n+r}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty} \delta_{m,n-j} q_m a_{n-m} x^{n+r}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{m=0}^{\infty} \delta_{m,n-j} q_m a_{n-m} x^{n+r}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n} q_{n-j} a_j x^{n+r}. \qquad (5)
\end{aligned}
$$

Substituindo as Eqs. (4) e (5) na Eq. (1), obtemos:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r} \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n} (j+r) p_{n-j} a_j x^{n+r} \\
&\qquad + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n} q_{n-j} a_j x^{n+r} = 0,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
&r(r-1) a_0 x^r + r p_0 a_0 x^r + q_0 a_0 x^r \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r} \\
&\qquad + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n} (j+r) p_{n-j} a_j x^{n+r} \\
&\qquad\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n} q_{n-j} a_j x^{n+r} = 0,
\end{aligned}
$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
r\left(r-1\right)a_0x^r+rp_0a_0x^r+q_0a_0x^r & \\
+\sum_{n=1}^{\infty}\left(n+r\right)\left(n+r-1\right)a_nx^{n+r} & \\
+\sum_{n=1}^{\infty}\left(n+r\right)p_0a_nx^{n+r}+\sum_{n=1}^{\infty}q_0a_nx^{n+r} & \\
+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n-1}\left(j+r\right)p_{n-j}a_jx^{n+r} & \\
+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n-1}q_{n-j}a_jx^{n+r} & = 0,
\end{aligned}$$

seguindo o que o livro-texto faz. Então, notando a Eq. (3), vem:

$$\begin{aligned}
\left[r\left(r-1\right)+rp_0+q_0\right]a_0x^r & \\
+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(n+r\right)\left(n+r-1\right)+\left(n+r\right)p_0+q_0\right]a_nx^{n+r} & \\
+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n-1}\left[\left(j+r\right)p_{n-j}+q_{n-j}\right]a_jx^{n+r} & = 0,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
F\left(r\right)a_0x^r+\sum_{n=1}^{\infty}F\left(r+n\right)a_nx^{n+r} & \\
+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n-1}\left[\left(j+r\right)p_{n-j}+q_{n-j}\right]a_jx^{n+r} & = 0,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$F\left(r\right)a_0x^r+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{F\left(r+n\right)a_n+\sum_{j=0}^{n-1}\left[\left(j+r\right)p_{n-j}+q_{n-j}\right]a_j\right\}x^{n+r} = 0, \tag{6}$$

que é o resultado do livro-texto. Como esta equação deve valer para todo x em um intervalo em torno de $x_0 = 0$, temos que ter

$$F\left(r\right) = 0,$$

já que estamos supondo que $a_0 \neq 0$. Esta é a **equação indicial**, que já vimos antes, e que fornece as duas raízes r_1 e r_2. Estes números são os **expoentes em torno da singularidade**, isto é, a maneira como a solução vai se aproximar de $x_0 = 0$. Ambos podem ser iguais.