Logo, podemos concluir que

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n!\,(2n-1)\,(2n-3)\ldots 5.3.1}a_0.$$

Podemos notar que, por exemplo,

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{1}{1.3.5.7}\frac{1}{4!}a_0 \\ &= \frac{1}{7.5.3.1}\frac{1}{4.3.2.1}a_0 \\ &= \frac{1}{7.5.3.1}\frac{2^4}{8.6.4.2}a_0 \\ &= \frac{2^4}{8.7.6.5.4.3.2.1}a_0 \\ &= \frac{2^4}{(2.4)!}a_0 \end{aligned}$$

e, portanto,

$$a_n = \frac{(-1)^n\,2^n}{(2n)!}a_0.$$

Assim, a série fica

$$y_{r_-=1/2} = a_0 x^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n.$$

Vejamos agora que esta série é convergente usando o teste do quociente:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(-1)^{n+1}\,2^{n+1}\,(2n)!}{(-1)^n\,2^n\,(2n+2)!} \\ &= -\frac{2\,(2n)!}{(2n+2)\,(2n+1)\,(2n)!} \\ &= -\frac{2}{(2n+2)\,(2n+1)} \end{aligned}$$

e, assim,

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1+1/2}}{a_n x^{n+1/2}}\right| = |x|\,\frac{2}{(2n+2)\,(2n+1)}$$

$$|x|\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(2n+2)\,(2n+1)} = 0 < 1$$

e a série converge para todo $x > 0$ finito.

O próximo passo agora, neste exemplo, é resolver a série para $r_+ = 1$. O processo é o análogo: escrevemos a série

$$\begin{aligned} y &= x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} \end{aligned}$$

e substituímos na equação diferencial dada. Façamos as derivadas:

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_n x^n$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, n a_n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\, n a_n x^{n-1}. \end{aligned}$$

Substituindo estas séries na equação diferencial dada, obtemos:

$$\begin{aligned} 2x^2 \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\, n a_n x^{n-1} - x \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_n x^n & \\ + (1+x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} &= 0, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} 2\,(n+2)\,(n+1)\, a_{n+1} x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_n x^{n+1} & \\ + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} &= 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[2\,(n+2)\,(n+1)\, a_{n+1} + a_n\right] x^{n+2} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n+1} = 0,$$

ou ainda,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[2\,(n+2)\,(n+1)\, a_{n+1} + a_n\right] x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1} x^{n+2} = 0.$$

Logo,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{\left[2\,(n+2)\,(n+1) - (n+1)\right] a_{n+1} + a_n\right\} x^{n+2} = 0,$$

isto é,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(2n+3)(n+1)\,a_{n+1}+a_n\right]x^{n+2} \quad = \quad 0.$$

Como esta equação tem que valer para todo x em algum intervalo em torno da origem, segue que

$$(2n+3)(n+1)\,a_{n+1}+a_n \quad = \quad 0,$$

ou seja, encontramos a seguinte fórmula de recorrência para os coeficientes da série de Fobenius:

$$a_{n+1} \quad = \quad \frac{-1}{(2n+3)(n+1)}a_n.$$

Vejamos:

$$a_1 \quad = \quad \frac{-1}{3.1}a_0,$$

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{-1}{5.2}a_1 \\ &= \frac{1}{5.3}\frac{1}{2.1}a_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{-1}{7.3}a_2 \\ &= \frac{-1}{7.3}\frac{1}{5.3}\frac{1}{2.1}a_0 \\ &= \frac{-1}{7.5.3}\frac{1}{3.2.1}a_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{-1}{9.4}a_3 \\ &= \frac{1}{9.7.5.3.1}\frac{1}{4.3.2.1}a_0. \end{aligned}$$

É evidente, então, que

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(-1)^n}{n!\,(2.n+1)(2.n-1)(2.n-3)\dots 5.3.1}a_0 \\ &= \frac{(-1)^n}{n(n-1)(n-2)\dots 4.3.2.1.\,(2.n+1)(2.n-1)(2.n-3)\dots 5.3.1}a_0 \\ &= \frac{(-1)^n\,2^n}{(2n)(2n-2)(2n-4)\dots 8.6.4.2.\,(2.n+1)(2.n-1)(2.n-3)\dots 5.3.1}a_0 \\ &= \frac{(-1)^n\,2^n}{(2.n+1)(2n)(2.n-1)(2n-2)(2.n-3)(2n-4)\dots 6.5.4.3.2.1}a_0 \\ &= \frac{(-1)^n\,2^n}{(2n+1)!}a_0. \end{aligned}$$

A solução de Frobenius fica

$$y_{r_+=1} = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{(2n+1)!} x^{n+1},$$

para $x > 0$. O teste do quociente aqui dá:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+2}}{a_n x^{n+1}} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1} 2^{n+1}}{(2n+3)!} x^{n+2}}{\frac{(-1)^n 2^n}{(2n+1)!} x^{n+1}} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| -\frac{2(2n+1)!}{(2n+3)!} x \right| \\
&= |x| \lim_{n\to\infty} \frac{2(2n+1)!}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!} \\
&= |x| \lim_{n\to\infty} \frac{2}{(2n+3)(2n+2)} \\
&= 0 < 1
\end{aligned}$$

e, portanto, o intervalo de convergência é para todo $x > 0$ finito.

Veja que as duas soluções acima são linearmente independentes, como pode ser verificado pelo cálculo do Wronskiano. Então, com $y_{r_+=1}$ e $y_{r_-=1/2}$ obtivemos um conjunto fundamental de soluções da equação diferencial homogênea dada.

Método de Frobenius

Vamos continuar nossa investigação teórica do método de Frobenius. Consideremos a equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x) y = 0,$$

onde $x_0 = 0$ é um ponto singular regular, isto é,

$$\lim_{x\to 0} x p(x) = p_0$$

e

$$\lim_{x\to 0} x^2 q(x) = q_0,$$

com p_0 e q_0 números finitos e, além disso, com $xp(x)$ e $x^2 q(x)$ funções analíticas em $x_0 = 0$. Então, como vimos anteriormente,

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$$

e

$$x^2 q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n.$$

Vamos agora considerar o ansatz de Frobenius, propondo uma solução da equação diferencial da seguinte forma:

$$\begin{aligned} y &= x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, \end{aligned}$$

onde $a_0 \neq 0$, já que no limite em que $x \to 0$ a equação dada se aproxima da equação de Euler e r será uma das raízes da equação indicial, como veremos a seguir. Calculemos as derivadas de y :

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\, a_n x^{n+r-1}$$

e

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)\, a_n x^{n+r-2}.$$

Substituindo nossos resultados na equação diferencial dada, obtemos:

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)\, a_n x^{n+r} \\ &\quad + xp(x) \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\, a_n x^{n+r} \\ &\quad\quad + x^2 q(x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0, \end{aligned}$$

onde multiplicamos tudo por x^2. Vamos agora usar as séries de Taylor de $xp(x)$ e $x^2 q(x)$:

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)\, a_n x^{n+r} \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} p_m x^m \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\, a_n x^{n+r} \\ &\quad + \sum_{m=0}^{\infty} q_m x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

A seguir reescrevemos esta equação colecionando os termos em ordem crescente de potências de x :

$$\begin{aligned} r(r-1)\, a_0 x^r + (r+1)\, r a_1 x^{r+1} + (r+2)(r+1)\, a_2 x^{r+2} + \ldots \\ + p_0 r a_0 x^r + p_0 (r+1)\, a_1 x^{r+1} + p_1 r a_0 x^{r+1} \\ + p_0 (r+2)\, a_2 x^{r+2} + p_1 (r+1)\, a_1 x^{r+2} + p_2 r a_0 x^{r+2} \ldots \\ + q_0 a_0 x^r + q_0 a_1 x^{r+1} + q_1 a_0 x^{r+1} \\ + q_0 a_2 x^{r+2} + q_1 a_1 x^{r+2} + q_2 a_0 x^{r+2} + \ldots &= 0, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
&\left[r\left(r-1\right)+p_0 r+q_0\right]a_0 x^r \\
&+\left[\left(r+1\right)r a_1+p_0\left(r+1\right)a_1+p_1 r a_0+q_0 a_1+q_1 a_0\right]x^{r+1} \\
&+\left[\left(r+2\right)\left(r+1\right)a_2+p_0\left(r+2\right)a_2+p_1\left(r+1\right)a_1\right. \\
&\left.+p_2 r a_0+q_0 a_2+q_1 a_1+q_2 a_0\right]x^{r+2}+\ldots = 0. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Vamos seguir o livro-texto e definir

$$F\left(r\right) \equiv r\left(r-1\right)+p_0 r+q_0, \qquad (3)$$

de modo que

$$F\left(r+1\right) = r\left(r+1\right)+p_0\left(r+1\right)+q_0$$

e

$$F\left(r+2\right) = \left(r+1\right)\left(r+2\right)+p_0\left(r+2\right)+q_0.$$

Notando estas quantidades na Eq. (2), temos:

$$\begin{aligned}
&F\left(r\right)a_0 x^r+\left[F\left(r+1\right)a_1+\left(p_1 r+q_1\right)a_0\right]x^{r+1} \\
&+\left\{F\left(r+2\right)a_2+\left[p_1\left(r+1\right)+q_1\right]a_1+\left(p_2 r+q_2\right)a_0\right\}x^{r+2}+\ldots = 0.
\end{aligned}$$

Como encontramos o coeficiente de x^{r+n}, que o livro-texto mostra? Para responder esta questão, notemos primeiro o seguinte:

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{\infty} p_m x^m \sum_{n=0}^{\infty}\left(n+r\right)a_n x^{n+r} &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+r\right)p_m a_n x^{m+n+r} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left(j+r\right)p_m a_j x^{m+j+r},
\end{aligned}$$

que aparece na Eq. (1). Note que podemos reescrever este resultado assim:

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m x^m \sum_{n=0}^{\infty}\left(n+r\right)a_n x^{n+r} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left(j+r\right)p_m a_j \sum_{n=0}^{\infty}\delta_{m+j,n}x^{n+r},$$

onde

$$\delta_{m+j,n} = \begin{cases} 1, & \text{se } m+j=n, \\ 0, & \text{se } m+j\neq n \end{cases}$$

é a chamada delta de Kronecker.