Logo, podemos concluir que

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n!\,(2n-1)\,(2n-3)\ldots 5.3.1} a_0.$$

Podemos notar que, por exemplo,

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{1}{1.3.5.7}\frac{1}{4!}a_0 \\ &= \frac{1}{7.5.3.1}\frac{1}{4.3.2.1}a_0 \\ &= \frac{1}{7.5.3.1}\frac{2^4}{8.6.4.2}a_0 \\ &= \frac{2^4}{8.7.6.5.4.3.2.1}a_0 \\ &= \frac{2^4}{(2.4)!}a_0 \end{aligned}$$

e, portanto,

$$a_n = \frac{(-1)^n\,2^n}{(2n)!}a_0.$$

Assim, a série fica

$$y_{r_-=1/2} = a_0 x^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^n.$$

Vejamos agora que esta série é convergente usando o teste do quociente:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(-1)^{n+1}\,2^{n+1}\,(2n)!}{(-1)^n\,2^n\,(2n+2)!} \\ &= -\frac{2\,(2n)!}{(2n+2)\,(2n+1)\,(2n)!} \\ &= -\frac{2}{(2n+2)\,(2n+1)} \end{aligned}$$

e, assim,

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1+1/2}}{a_n x^{n+1/2}}\right| = |x|\,\frac{2}{(2n+2)\,(2n+1)}$$

$$|x| \lim_{n\to\infty} \frac{2}{(2n+2)\,(2n+1)} = 0 < 1$$

e a série converge para todo $x > 0$ finito.

O próximo passo agora, neste exemplo, é resolver a série para $r_+ = 1$. O processo é o análogo: escrevemos a série

$$\begin{aligned} y &= x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} \end{aligned}$$

e substituímos na equação diferencial dada. Façamos as derivadas:

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_n x^n$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, n a_n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\, n a_n x^{n-1}. \end{aligned}$$

Substituindo estas séries na equação diferencial dada, obtemos:

$$\begin{aligned} 2x^2 \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\, n a_n x^{n-1} - x\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_n x^n \\ + (1+x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} &= 0, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} 2\,(n+2)\,(n+1)\, a_{n+1} x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_n x^{n+1} \\ + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} &= 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[2\,(n+2)\,(n+1)\, a_{n+1} + a_n\right] x^{n+2} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n+1} = 0,$$

ou ainda,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[2\,(n+2)\,(n+1)\, a_{n+1} + a_n\right] x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1} x^{n+2} = 0.$$

Logo,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{\left[2\,(n+2)\,(n+1) - (n+1)\right] a_{n+1} + a_n\right\} x^{n+2} = 0,$$

isto é,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(2n+3)\,(n+1)\,a_{n+1} + a_n \right] x^{n+2} \quad = \quad 0.$$

Como esta equação tem que valer para todo x em algum intervalo em torno da origem, segue que

$$(2n+3)\,(n+1)\,a_{n+1} + a_n \quad = \quad 0,$$

ou seja, encontramos a seguinte fórmula de recorrência para os coeficientes da série de Fobenius:

$$a_{n+1} \quad = \quad \frac{-1}{(2n+3)\,(n+1)} a_n.$$

Vejamos:

$$a_1 \quad = \quad \frac{-1}{3.1} a_0,$$

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{-1}{5.2} a_1 \\ &= \frac{1}{5.3} \frac{1}{2.1} a_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{-1}{7.3} a_2 \\ &= \frac{-1}{7.3} \frac{1}{5.3} \frac{1}{2.1} a_0 \\ &= \frac{-1}{7.5.3} \frac{1}{3.2.1} a_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{-1}{9.4} a_3 \\ &= \frac{1}{9.7.5.3.1} \frac{1}{4.3.2.1} a_0. \end{aligned}$$

É evidente, então, que

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(-1)^n}{n!\,(2.n+1)\,(2.n-1)\,(2.n-3)\ldots 5.3.1} a_0 \\ &= \frac{(-1)^n}{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots 4.3.2.1.\,(2.n+1)\,(2.n-1)\,(2.n-3)\ldots 5.3.1} a_0 \\ &= \frac{(-1)^n\,2^n}{(2n)\,(2n-2)\,(2n-4)\ldots 8.6.4.2.\,(2.n+1)\,(2.n-1)\,(2.n-3)\ldots 5.3.1} a_0 \\ &= \frac{(-1)^n\,2^n}{(2.n+1)\,(2n)\,(2.n-1)\,(2n-2)\,(2.n-3)\,(2n-4)\ldots 6.5.4.3.2.1} a_0 \\ &= \frac{(-1)^n\,2^n}{(2n+1)!} a_0. \end{aligned}$$

A solução de Frobenius fica

$$y_{r_+=1} = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{(2n+1)!} x^{n+1},$$

para $x > 0$. O teste do quociente aqui dá:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+2}}{a_n x^{n+1}} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1} 2^{n+1}}{(2n+3)!} x^{n+2}}{\frac{(-1)^n 2^n}{(2n+1)!} x^{n+1}} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| -\frac{2\,(2n+1)!}{(2n+3)!} x \right| \\
&= |x| \lim_{n\to\infty} \frac{2\,(2n+1)!}{(2n+3)\,(2n+2)\,(2n+1)!} \\
&= |x| \lim_{n\to\infty} \frac{2}{(2n+3)\,(2n+2)} \\
&= 0 < 1
\end{aligned}$$

e, portanto, o intervalo de convergência é para todo $x > 0$ finito.

Veja que as duas soluções acima são linearmente independentes, como pode ser verificado pelo cálculo do Wronskiano. Então, com $y_{r_+=1}$ e $y_{r_-=1/2}$ obtivemos um conjunto fundamental de soluções da equação diferencial homogênea dada.