Exemplo do livro-texto

Vamos ilustrar este método resolvendo a equação

$$2x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + (1+x)\, y \quad = \quad 0.$$

O primeiro passo é calcularmos $p(x)$ e $q(x)$:

$$p(x) \quad = \quad -\frac{x}{2x^2} = -\frac{1}{2x}$$

e

$$q(x) \quad = \quad \frac{1+x}{2x^2}.$$

O segundo passo é vermos se o ponto $x = 0$ é um ponto singular regular, já que $x = 0$ é obviamente singular. Assim, calculamos:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} xp(x) &= \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{2} \\ &\equiv p_0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} x^2 q(x) &= \lim_{x\to 0}\frac{1+x}{2} \\ &= \frac{1}{2} \\ &\equiv q_0. \end{aligned}$$

Como ambos limites são finitos, $x = 0$ é um ponto singular regular. O terceiro passo é encontrarmos a equação indicial. Mas já sabemos que a equação de Euler associada a esta é equação que queremos resolver é

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + xp_0\frac{dy}{dx} + q_0 y \quad = \quad 0,$$

isto é,

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{x}{2}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}y \quad = \quad 0.$$

A equação indicial é obtida, como no livro, simplesmente fazendo nosso $\alpha = -r$ e resolvendo para r. Tínhamos

$$\alpha^2 + (1-p_0)\,\alpha + q_0 \quad = \quad 0$$

e, assim, usando $\alpha = -r$,

$$r^2 - \frac{3}{2}r + \frac{1}{2} \quad = \quad 0,$$

que dá

$$\begin{aligned} r_{\pm} &= \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2}}{2} \\ &= \frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$r_{+} = 1$$

e

$$r_{-} = \frac{1}{2}.$$

Vemos que temos duas raízes diferentes. O livro-texto faz primeiro com r_+, mas aqui, justamente porque é novidade o caso com $r_- = 1/2$, racional, escolhemos resolver para esta raiz, enquanto que o outro caso você pode ler no livro-texto.

Usemos, então, o ansatz de Frobenius para $r_- = 1/2$, isto é, $\alpha_- = -1/2$:

$$\begin{aligned} y &= x^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1/2}. \end{aligned}$$

Como vamos substituir esta série na equação diferencial original, vamos tomar suas derivadas:

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) a_n x^{n-1/2}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n + \frac{1}{2}\right) a_n x^{n-3/2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(n^2 - \frac{1}{4}\right) a_n x^{n-3/2}. \end{aligned}$$

Logo, a equação diferencial fica:

$$\begin{aligned} 2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(n^2 - \frac{1}{4}\right) a_n x^{n-3/2} - x \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) a_n x^{n-1/2} & \\ + (1+x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1/2} &= 0, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(n^2 - \frac{1}{4}\right) a_n x^{n+1/2} - \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) a_n x^{n+1/2} & \\ + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1/2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+3/2} &= 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\left(2n^2-\frac{1}{2}-n-\frac{1}{2}+1\right)a_n x^{n+1/2} & \\ +\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+3/2} &= 0,\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\,(2n-1)\,a_n x^{n+1/2}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+3/2} = 0.$$

Dividindo tudo por $x^{1/2}$, obtemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\,(2n-1)\,a_n x^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+1} = 0,$$

isto é,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,(2n-1)\,a_n x^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+1} = 0.$$

Esta equação também pode ser reescrita assim:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,(2n+1)\,a_{n+1}x^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+1} = 0,$$

ou seja, dividindo tudo por x,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,(2n+1)\,a_{n+1}x^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n} = 0,$$

ou ainda,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)\,(2n+1)\,a_{n+1}+a_n\right]x^{n} = 0.$$

Como esta equação deve valer para todo x em um intervalo suficientemente próximo de $x_0=0$, segue que

$$(n+1)\,(2n+1)\,a_{n+1}+a_n = 0$$

para todo $n=0,1,2,\ldots$ Portanto, temos:

$$a_{n+1} = \frac{-1}{(n+1)\,(2n+1)}a_n.$$

Assim,

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{-1}{1.1} a_0 \\ &= -a_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{-1}{2.3} a_1 \\ &= \frac{1}{3!} a_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{-1}{3.5} a_2 \\ &= \frac{-1}{3.5} \frac{1}{3!} a_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{-1}{4.7} a_3 \\ &= \frac{1}{1.3.5.7} \frac{1}{4!} a_0. \end{aligned}$$