Solução em série em torno de um ponto singular regular

Sem perda de generalidade, vamos supor que temos um ponto singular regular em x_0 e vamos escolher o sistema de coordenadas tal que a origem é escolhida em x_0 e, nesse sistema, portanto, temos $x_0 = 0$ como sendo o ponto singular regular. Um ponto singular em $x_0 = 0$ é dito regular quando, dada a equação diferencial na forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\left(x\right)\frac{dy}{dx} + q\left(x\right)y \quad = \quad 0,$$

temos

$$\lim_{x\to 0} xp\left(x\right) \quad = \quad p_0$$

e

$$\lim_{x\to 0} x^2 q\left(x\right) \quad = \quad q_0,$$

com p_0 e q_0 números finitos e, além disso, com $xp\left(x\right)$ e $x^2q\left(x\right)$ funções analíticas em $x_0 = 0$. Caso a singularidade seja tal que esses limites não sejam ambos finitos, isto é, pelo menos um deles diverge, então o ponto $x_0 = 0$ é chamado um ponto singular irregular que não abordaremos neste curso.

Ainda sem perda de generalidade, vamos considerar soluções para $x > 0$. Soluções para $x < 0$ também podem ser consideradas pelo mesmo método fazendo a troca de variável $x \to -x'$ e depois aplicando o tratamento que vamos fazer abaixo, já que aí, de novo ficamos com a situação em que a solução na nova variável é feita para o caso em que $x' > 0$.

Como o livro-texto faz, vamos multiplicar a equação diferencial por x^2 para fazer essas funções aparecerem explicitamente, isto é,

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\left[xp\left(x\right)\right]\frac{dy}{dx} + \left[x^2q\left(x\right)\right]y \quad = \quad 0.$$

Então, para $x > 0$, sendo $xp\left(x\right)$ e $x^2q\left(x\right)$ funções analíticas em $x_0 = 0$, segue que existe um intervalo de convergência em torno de $x_0 = 0$ dentro do qual $xp\left(x\right)$ e $x^2q\left(x\right)$ têm expansões em séries de Taylor, isto é,

$$xp\left(x\right) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$$

e

$$x^2q\left(x\right) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n.$$

Vamos também notar que podemos reescrever estas duas séries de potências assim:

$$xp\left(x\right) \quad = \quad p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 + \ldots$$

e

$$x^2q\left(x\right) \quad = \quad q_0 + q_1x + q_2x^2 + q_3x^3 + \ldots,$$

ou ainda,

$$xp\left(x\right) \quad = \quad p_0\left(1 + \frac{p_1}{p_0}x + \frac{p_2}{p_0}x^2 + \frac{p_3}{p_0}x^3 + \ldots\right)$$

e

$$x^2 q(x) = q_0\left(1+\frac{q_1}{q_0}x+\frac{q_2}{q_0}x^2+\frac{q_3}{q_0}x^3+\dots\right),$$

se supusermos que $p_0 \neq 0$ e $q_0 \neq 0$. Agora a equação diferencial pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} x^2\frac{d^2y}{dx^2}+xp_0\left(1+\frac{p_1}{p_0}x+\frac{p_2}{p_0}x^2+\frac{p_3}{p_0}x^3+\dots\right)\frac{dy}{dx} & \\ +q_0\left(1+\frac{q_1}{q_0}x+\frac{q_2}{q_0}x^2+\frac{q_3}{q_0}x^3+\dots\right)y &= 0. \end{aligned}$$

Como estamos interessados em soluções para $x>0$ próximas de $x_0=0$, vemos que $x \ll 1$ e a equação diferencial, grosseiramente, se aproxima da chamada equação de Euler:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+xp_0\frac{dy}{dx}+q_0y = 0.$$

O livro-texto faz a solução em detalhes desta equação diferencial. Aqui, para economizar tempo, vamos rever a apresentação do livro-texto, mas dentro do caso mais geral acima. Vamos supor que $p_0 \neq 0$ e $q_0 \neq 0$, mas depois o método poderá ser aplicado para o caso geral em que essa suposição não se aplica.

É intuitivo especular que, talvez, a solução da equação dada seja parecida com a solução da equação de Euler, mas com correções de ordem superior na variável x. Logo, vamos usar o que já aprendemos para resolver a equação de Euler. Vamos usar o método do fator integrante. Note que neste caso os coeficientes não são constantes. Mas como temos um fator x^2 na segunda derivada e um fator x na primeira derivada, podemos tentar o seguinte ansatz:

$$\left(x\frac{d}{dx}+\alpha\right)\left(x\frac{d}{dx}+\beta\right)y = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left(x\frac{d}{dx}+\alpha\right)\left(x\frac{d}{dx}+\beta\right)y &= x\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}+\beta\right)y+\alpha\left(x\frac{d}{dx}+\beta\right)y \\ &= x\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}+\beta y\right)+\alpha x\frac{dy}{dx}+\alpha\beta y \\ &= x\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+\beta x\frac{dy}{dx}+\alpha x\frac{dy}{dx}+\alpha\beta y \\ &= x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+\beta x\frac{dy}{dx}+\alpha x\frac{dy}{dx}+\alpha\beta y \\ &= x^2\frac{d^2y}{dx^2}+(\alpha+\beta+1)\,x\frac{dy}{dx}+\alpha\beta y \end{aligned}$$

deve ser igual a

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+xp_0\frac{dy}{dx}+q_0y,$$

implicando que

$$(\alpha+\beta+1) = p_0$$

e

$$\alpha\beta = q_0.$$

Vamos resolver a equação para β na segunda equação e substituir na primeira; depois nós resolvemos para α. Então,

$$\beta = \frac{q_0}{\alpha}$$

e, portanto,

$$\alpha + \frac{q_0}{\alpha} + 1 - p_0 = 0,$$

isto é,

$$\alpha^2 + (1 - p_0)\,\alpha + q_0 = 0.$$

Teremos duas soluções para α :

$$\alpha_{\pm} = \frac{p_0 - 1 \pm \sqrt{(1 - p_0)^2 - 4q_0}}{2}.$$

Veja que

$$\begin{aligned}
\beta_{\pm} &= \frac{2q_0}{p_0 - 1 \pm \sqrt{(1 - p_0)^2 - 4q_0}} \\
&= \frac{2q_0\left[p_0 - 1 \mp \sqrt{(1 - p_0)^2 - 4q_0}\right]}{\left[p_0 - 1 \pm \sqrt{(1 - p_0)^2 - 4q_0}\right]\left[p_0 - 1 \mp \sqrt{(1 - p_0)^2 - 4q_0}\right]} \\
&= \frac{2q_0\left[p_0 - 1 \mp \sqrt{(1 - p_0)^2 - 4q_0}\right]}{(p_0 - 1)^2 - (1 - p_0)^2 + 4q_0} \\
&= \frac{p_0 - 1 \mp \sqrt{(1 - p_0)^2 - 4q_0}}{2} \\
&= \alpha_{\mp}.
\end{aligned}$$

Com isso vemos que a nossa equação de Euler pode ser escrita como

$$\left(x\frac{d}{dx} + \alpha_+\right)\left(x\frac{d}{dx} + \alpha_-\right)y = 0.$$

Vamos agora definir:

$$s \equiv \left(x\frac{d}{dx} + \alpha_-\right)y$$

e aí ficamos com

$$\left(x\frac{d}{dx}+\alpha_+\right)s \quad = \quad 0.$$

Dividindo tudo por x, vem:

$$\left(\frac{d}{dx}+\frac{1}{x}\alpha_+\right)s \quad = \quad 0.$$

Com a metodologia do fator integrante, precisamos achar uma função $\mu = \mu(x)$ tal que

$$\mu\left(\frac{d}{dx}+\frac{1}{x}\alpha_+\right)s \quad = \quad \frac{d}{dx}(\mu s).$$

Como

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\mu s) \quad &= \quad \mu\frac{ds}{dx}+s\frac{d\mu}{dx} \\ &= \quad \mu\left(\frac{d}{dx}+\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx}\right)s,\end{aligned}$$

segue que, comparando com a equação acima, basta escolhermos μ tal que

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx} \quad = \quad \frac{1}{x}\alpha_+$$

e teremos nosso fator integrante. Esta equação é separável, ou seja,

$$\frac{d\mu}{\mu} \quad = \quad \alpha_+\frac{dx}{x}$$

e a integração de ambos os membros fornece:

$$\ln\mu \quad = \quad \alpha_+\ln x,$$

lembrando que $x > 0$ por hipótese. Podemos ainda escrever:

$$\ln\mu \quad = \quad \ln x^{\alpha_+}.$$

Exponenciando ambos os membros, obtemos:

$$\mu \quad = \quad x^{\alpha_+}.$$

Com este fator integrante, podemos escrever a equação original agora como

$$\frac{d}{dx}(\mu s) \quad = \quad 0,$$

dando

$$\mu s \quad = \quad C_1,$$

onde C_1 é uma constante arbitrária. Portanto,

$$s = C_1 x^{-\alpha_+}.$$

Da definição de s e desta solução, vemos que

$$\left(x\frac{d}{dx} + \alpha_-\right) y = C_1 x^{-\alpha_+},$$

ou, dividindo tudo por x, obtemos

$$\left(\frac{d}{dx} + \frac{1}{x}\alpha_-\right) y = C_1 x^{-\alpha_+ - 1},$$

É claro que agora o fator integrante para esta equação que falta resolvermos é x^{α_-} e temos:

$$x^{\alpha_-}\left(\frac{d}{dx} + \frac{1}{x}\alpha_-\right) y = C_1 x^{-\alpha_+ - 1} x^{\alpha_-},$$

isto é,

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\alpha_-} y\right) = C_1 x^{-\alpha_+ + \alpha_- - 1}.$$

Aqui precisamos distinguir duas situações: quando $\alpha_+ \neq \alpha_-$ e quando $\alpha_+ = \alpha_-$. Vamos considerar o primeiro caso, quando $\alpha_+ \neq \alpha_-$. Integrando em x ambos os membros da equação acima dá:

$$x^{\alpha_-} y = \frac{C_1}{-\alpha_+ + \alpha_-} x^{-\alpha_+ + \alpha_-} + C_-,$$

onde C_- é outra constante arbitrária. Podemos dividir tudo por x^{α_-} e obter:

$$y = C_+ x^{-\alpha_+} + C_- x^{-\alpha_-},$$

onde, por razões estéticas, definimos

$$C_+ \equiv \frac{C_1}{-\alpha_+ + \alpha_-}.$$

No segundo caso, isto é, quando $\alpha_+ = \alpha_- \equiv \alpha$, a equação acima fica

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\alpha} y\right) = C_1 x^{-1}$$

e, integração em ambos os membros fornece:

$$x^{\alpha} y = C_1 \ln x + C_2,$$

ou seja,

$$y = C_1 x^{-\alpha} \ln x + C_2 x^{-\alpha}.$$

Esta forma que decidi usar para resolver a equação de Euler, embora mencionada no livro-texto, não é implementada lá, mas certamente é equivalente ao método adotado pelos autores. A situação que é notória aqui é o fato de que teremos pelo menos uma solução em que a principal contribuição é dada por $x^{-\alpha}$, onde α é uma das raízes da chamada equação indicial:

$$\alpha^2 + (1 - p_0)\,\alpha + q_0 \quad = \quad 0.$$

(Sim, eu sei: está um pouco diferente da notação do livro-texto... Sim, é confuso... Desculpe-me, se possível! A única diferença é que estou usando o meu α como o $-r$ do livro-texto.)

Note também que como

$$xp\,(x) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$$

e

$$x^2 q\,(x) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n,$$

segue que

$$p_0 \quad = \quad \lim_{x \to 0} xp\,(x)$$

e

$$q_0 \quad = \quad \lim_{x \to 0} x^2 q\,(x)\,.$$

Então, como a principal contribuição para $x \ll 1$ vem de $x^{-\alpha}$, onde α pode ser um número real ou mesmo complexo, podemos propor uma solução para a equação original,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p\,(x)\,\frac{dy}{dx} + q\,(x)\,y \quad = \quad 0,$$

que não é a de Euler que acabamos de resolver acima, como sendo $x^{-\alpha}$ corrigida por uma série de potências em x. O ansatz que utilizamos, nesse caso é o que é conhecido como o método de Frobenius:

$$y \quad = \quad x^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

com $a_0 \neq 0$, já que a maior contribuição tem que vir da solução da equação de Euler associada como fizemos acima.