Solução em série de potências em torno de um ponto ordinário

Agora vamos ver por que o método acima funcionou no caso do oscilador harmônico. Considere uma equação da seguinte forma:

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2}+Q(x)\frac{dy}{dx}+R(x)y = 0,$$

com $y=y(x)$. Suponha que, em torno de um ponto x_0, temos

$$p(x) \equiv \frac{Q(x)}{P(x)}$$

e

$$q(x) \equiv \frac{R(x)}{P(x)}$$

como sendo duas funções analíticas, isto é, as séries de Taylor para $p(x)$ e $q(x)$ existem em um intervalo em torno de x_0. Um tal ponto x_0 é chamado de ponto ordinário. No entanto, se pelo menos uma destas funções não for analítica no ponto x_0, então este ponto é dito singular. Logo, supondo x_0 ordinário, sabemos que podemos escrever:

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

e

$$q(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

onde $p^{(n)}(x_0)$ e $q^{(n)}(x_0)$ são as $n-$ésimas derivadas de $p(x)$ e $q(x)$ calculadas em x_0 e nossa notação é tal que

$$p^{(0)}(x_0) \equiv p(x_0)$$

e

$$q^{(0)}(x_0) \equiv q(x_0).$$

Agora suponha que, de fato, temos uma solução analítica para y em torno de x_0, isto é, exite uma função analítica $\phi(x)$ analítica em torno de x_0 tal que, então,

$$\begin{aligned} y &= \phi(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \end{aligned}$$

onde

$$a_n = \frac{\phi^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Agora perguntamos se é possível, usando a equação diferencial dada, encontrar todos os coeficientes a_n. Na verdade, temos que supor que temos duas condições iniciais para nossa equação diferencial ordinária de segunda ordem e, portanto, seja:

$$y(x_0) = y_0$$

e

$$y^{(1)}(x_0) = y_0'.$$

Note que poderíamos deixar sem especificar y_0 e y_0' e tomá-las como constantes arbitrárias. Mas, para poder tornar nossa compreensão mais concreta, vamos supor que temos números dados para essas condições iniciais.

Das duas condições iniciais, podemos já determinar as duas constantes a_0 e a_1, já que

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\phi^{(0)}(x_0)}{0!} \\ &= y_0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\phi^{(1)}(x_0)}{1!} \\ &= y_0'. \end{aligned}$$

Para achar a_2, precisamos calcular

$$a_2 = \frac{\phi^{(2)}(x_0)}{2!},$$

ou seja, precisamos de $\phi^{(2)}(x_0)$. Mas este valor nós encotramos usando a própria equação diferencial:

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0,$$

isto é,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{Q(x)}{P(x)}\frac{dy}{dx} + \frac{R(x)}{P(x)}y = 0,$$

ou seja,

$$\phi^{(2)}(x) + p(x)\phi^{(1)}(x) + q(x)\phi^{(0)}(x) = 0,$$

para todo x no intervalo onde há solução em torno de x_0. Vemos que, então,

$$\phi^{(2)}(x) = -p(x)\phi^{(1)}(x) - q(x)\phi^{(0)}(x)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \phi^{(2)}(x_0) &= -p(x_0)\phi^{(1)}(x_0) - q(x_0)\phi^{(0)}(x_0) \\ &= -p(x_0)y_0' - q(x_0)y_0 \\ &= -p(x_0)a_1 - q(x_0)a_0. \end{aligned}$$

Vemos, assim, que a equação diferencial forneceu, sem problemas, a_2, isto é,

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{\phi^{(2)}(x_0)}{2!} \\ &= \frac{-p(x_0)\,a_1 - q(x_0)\,a_0}{2}. \end{aligned}$$

Podemos também calcular a_3 usando a equação diferencial dada? Sim, claro, bastando para isso tomar a derivada de

$$\phi^{(2)}(x) = -p(x)\,\phi^{(1)}(x) - q(x)\,\phi^{(0)}(x),$$

que dá

$$\phi^{(3)}(x) = -p^{(1)}(x)\,\phi^{(1)}(x) - p(x)\,\phi^{(2)}(x) - q^{(1)}(x)\,\phi^{(0)}(x) - q(x)\,\phi^{(1)}(x).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \phi^{(3)}(x_0) &= -p^{(1)}(x_0)\,\phi^{(1)}(x_0) - p(x_0)\,\phi^{(2)}(x_0) - q^{(1)}(x_0)\,\phi^{(0)}(x_0) - q(x_0)\,\phi^{(1)}(x_0) \\ &= -\left[p^{(1)}(x_0) + q(x_0)\right]\phi^{(1)}(x_0) - q^{(1)}(x_0)\,\phi^{(0)}(x_0) - p(x_0)\,\phi^{(2)}(x_0), \end{aligned}$$

que podemos calcular explicitamente em termos de a_0, a_1 e a_2, já calculadas acima, e das derivadas de p e q calculadas em x_0 que, como vimos, todas existem, dada nossa hipótese de que essas funções são analíticas em x_0. Podemos agora continuar fazendo derivadas e calculando todos os infinitos coeficientes a_n. Fica claro que, de fato, obteremos duas soluções, uma multiplicada por a_0 e outra multiplicada por a_1. Para ver isso, basta notar que os próximos a_n serão sempre dados em termos dos anteriores e, no fim, só ficam a_0 e a_1 independentes.

A conclusão de nossa argumentação acima é que, de fato, se houver uma solução analítica para a equação diferencial dada em torno de x_0, então essa solução pode ser escrita como uma série

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \\ &= a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x), \end{aligned}$$

onde y_1 e y_2 são duas séries de potências que também convergem em torno de x_0. Vamos ver agora que y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções. Para isso, veja que

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \ldots$$

e, como já vimos acima,

$$a_2 = -\frac{q(x_0)}{2}a_0 - \frac{p(x_0)}{2}a_1$$

e

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{\phi^{(3)}(x_0)}{3!} \\ &= \frac{1}{6}\left\{-\left[p^{(1)}(x_0) + q(x_0)\right]\phi^{(1)}(x_0) - q^{(1)}(x_0)\,\phi^{(0)}(x_0) - p(x_0)\,\phi^{(2)}(x_0)\right\} \\ &= -\frac{1}{6}\left[p^{(1)}(x_0) + q(x_0)\right]\phi^{(1)}(x_0) - \frac{1}{6}q^{(1)}(x_0)\,\phi^{(0)}(x_0) - \frac{1}{6}p(x_0)\,\phi^{(2)}(x_0) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{6}\left[p^{(1)}(x_0)+q(x_0)\right]a_1-\frac{1}{6}q^{(1)}(x_0)a_0 \\
&\quad -\frac{1}{6}p(x_0)\left[-p(x_0)a_1-q(x_0)a_0\right] \\
&= -\frac{1}{6}\left[p^{(1)}(x_0)+q(x_0)\right]a_1-\frac{1}{6}q^{(1)}(x_0)a_0+\frac{1}{6}\left[p(x_0)\right]^2a_1+\frac{1}{6}p(x_0)q(x_0)a_0 \\
&= \frac{1}{6}\left[p(x_0)q(x_0)-q^{(1)}(x_0)\right]a_0-\frac{1}{6}\left[p^{(1)}(x_0)+q(x_0)-p^2(x_0)\right]a_1.
\end{aligned}
$$

Com isso tudo, teremos, portanto,

$$
\begin{aligned}
y &= a_0+a_1(x-x_0)+\left[-\frac{q(x_0)}{2}a_0-\frac{p(x_0)}{2}a_1\right](x-x_0)^2 \\
&\quad +\left\{\frac{1}{6}\left[p(x_0)q(x_0)-q^{(1)}(x_0)\right]a_0-\frac{1}{6}\left[p^{(1)}(x_0)+q(x_0)-p^2(x_0)\right]a_1\right\}(x-x_0)^3+\ldots,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
y &= a_0\left\{1-\frac{q(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\frac{1}{6}\left[p(x_0)q(x_0)-q^{(1)}(x_0)\right](x-x_0)^3+\ldots\right\} \\
&\quad +a_1\left\{(x-x_0)-\frac{p(x_0)}{2}(x-x_0)^2-\frac{1}{6}\left[p^{(1)}(x_0)+q(x_0)-p^2(x_0)\right](x-x_0)^3+\ldots\right\}.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
y_1(x) = 1-\frac{q(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\frac{1}{6}\left[p(x_0)q(x_0)-q^{(1)}(x_0)\right](x-x_0)^3+\ldots
$$

e

$$
y_2(x) = (x-x_0)-\frac{p(x_0)}{2}(x-x_0)^2-\frac{1}{6}\left[p^{(1)}(x_0)+q(x_0)-p^2(x_0)\right](x-x_0)^3+\ldots
$$

Agora tudo o que temos a fazer é calcular o Wronskiano em x_0. Note que

$$
\frac{d}{dt}y_1(x) = -q(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}\left[p(x_0)q(x_0)-q^{(1)}(x_0)\right](x-x_0)^2+\ldots
$$

e

$$
\frac{d}{dt}y_2(x) = 1-p(x_0)(x-x_0)-\frac{1}{2}\left[p^{(1)}(x_0)+q(x_0)-p^2(x_0)\right](x-x_0)^2+\ldots.
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
y_1(x_0) &= 1, \\
y_2(x_0) &= 0, \\
\left.\frac{d}{dt}y_1(x)\right|_{x=x_0} &= 0
\end{aligned}
$$

e

$$\left.\frac{d}{dt}y_2(x)\right|_{x=x_0} = 1.$$

O Wronskiano dá, então,

$$\begin{aligned} W[y_1,y_2](x_0) &= y_1(x_0)\left.\frac{d}{dt}y_2(x)\right|_{x=x_0} - y_2(x_0)\left.\frac{d}{dt}y_1(x)\right|_{x=x_0} \\ &= 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Temos, portanto, que y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções da equação homogênea dada.

Em resumo, tendo uma equação

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0,$$

com

$$p(x) \equiv \frac{Q(x)}{P(x)}$$

e

$$q(x) \equiv \frac{R(x)}{P(x)}$$

analíticas em um ponto x_0, basta substituir na equação diferencial dada

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

e encontrar todos os coeficientes a_n com $n \geqslant 2$ em função de a_0 e a_1 e obteremos a solução geral em forma de série de potências da equação diferencial dada. Aí, é claro, o raio de convergência poderá ser determinado usando o teste da razão revisto acima.