Soluções por série

Brevíssima revisão sobre séries de potências

1. Uma série de potências

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

converge no ponto x se o limite

$$\lim_{M\to\infty} \sum_{n=0}^{M} a_n (x - x_0)^n$$

existe para esse ponto x.

2. Uma série de potências

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

converge absolutamente no ponto x se a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n (x - x_0)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \, |x - x_0|^n$$

converge. Se uma série converge absolutamente, então a série converge. A recíproca não é necessariamente válida.

3. Teste da razão: se $a_n \neq 0$ e se, para um valor fixo de x,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} (x - x_0)^{n+1}}{a_n (x - x_0)^n} \right| &= |x - x_0| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \\ &= |x - x_0| \, L, \end{aligned}$$

então a série de potências converve absolutamente para o valor fixo x se

$$|x - x_0| \, L < 1$$

e diverge se

$$|x - x_0| \, L > 1.$$

Caso

$$|x - x_0| \, L = 1,$$

então o teste é inconclusivo.

Exemplo de solução por série

Vamos agora ver o que acontece se tentarmos achar uma série de potências como sendo a solução para a equação diferencial do oscilador harmônico:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0.$$

Assim, consideremos que

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} n\,(n-1)\, a_n x^{n-2} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\, a_n x^{n-2}. \end{aligned}$$

Substituindo esta segunda derivada na equação diferencial, obtemos

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\, a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

isto é,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)\,(n+1)\, a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

ou seja,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)\,(n+1)\, a_{n+2} + a_n\right] x^n = 0.$$

Como uma solução em série tem que valer para todo x em um intervalo onde a série converge, segue que os coeficientes das potências de x têm que se anular. Logo,

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+2)\,(n+1)},$$

para $n = 0, 1, 2, \ldots$ Portanto, vemos que

$$a_2 = -\frac{a_0}{2!},$$

$$a_3 = -\frac{a_1}{3!},$$

$$\begin{aligned} a_4 &= -\frac{a_2}{4.3} \\ &= \frac{a_0}{4!}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_5 &= -\frac{a_3}{5.4} \\ &= \frac{a_1}{5!}, \end{aligned}$$

etc. Vemos, assim, que podemos escrever a série como

$$y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Como temos duas soluções linearmente independentes:

$$\begin{aligned} y_1 &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \\ &= \cos(x) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y_2 &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ &= \operatorname{sen}(x), \end{aligned}$$

onde a_0 e a_1 são constantes arbitrárias, vemos que obtivemos a solução geral da equação homogênea dada. Note também que o Wronskiano é igual a 1, mostrando que, de fato, y_1 e y_2, formam um conjunto fundamental de soluções para esta equação homogênea.