Transformada de Laplace

Considere a integral:

$$\mathcal{L}\left[f\right](s) \equiv \int_0^\infty dx\, \exp\left(-sx\right) f\left(x\right).$$

1 **Exemplo**: Considere

$$\begin{aligned} f\left(x\right) &= \exp\left(-x\right) \\ &= \frac{1}{\exp\left(x\right)} \\ &= \left(\frac{1}{\exp}\right)\left(x\right), \end{aligned}$$

isto é, nesta notação formal,

$$f = \frac{1}{\exp}.$$

Então, sua transformada de Laplace é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[1/\exp\right](s) &= \int_0^\infty dx\, \exp\left(-sx\right)\exp\left(-x\right) \\ &= \int_0^\infty dx\, \exp\left[-\left(1+s\right)x\right] \\ &= -\frac{1}{1+s}\exp\left[-\left(1+s\right)x\right]\Big|_0^\infty \\ &= \frac{1}{1+s}, \end{aligned}$$

mas isso só se $s > -1$.

2 **Exemplo**: Calcule a transformada de Laplace inversa, denotada $\mathcal{L}^{-1}$, da função dada abaixo:

$$g\left(s\right) = \frac{1}{1+s}.$$

Segue do exemplo anterior que

$$\mathcal{L}^{-1}\left[g\right](x) = \exp\left(-x\right).$$

3 **Exemplo**: Considere

$$f\left(x\right) = x^2.$$

Então, sua transformada de Laplace é dada por:

$$\mathcal{L}\left[f\right](s) = \int_0^\infty dx\, \exp\left(-sx\right) x^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\infty dx\, \frac{\partial^2}{\partial s^2} \exp(-sx) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial s^2} \int_0^\infty dx\, \exp(-sx) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left[-\frac{\exp(-sx)}{s} \Big|_0^\infty \right] \\
&= \frac{\partial^2}{\partial s^2} \frac{1}{s} \\
&= -\frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{s^2} \\
&= \frac{2}{s^3},
\end{aligned}
$$

que só existe quando $s > 0$.

4 Exemplo: Calcule a transformada de Laplace inversa, denotada $\mathcal{L}^{-1}$, da função dada abaixo:

$$
g(s) = \frac{1}{s^3}.
$$

Segue do exemplo anterior que

$$
\mathcal{L}^{-1}[g](x) = \tfrac{x^2}{2} \quad .
$$

5 Exemplo: Como é a transformada de Laplace de $f'(x) \equiv df(x)/dx$? Note que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[f'](s) &= \int_0^\infty dx\, \exp(-sx) \frac{df(x)}{dx} \\
&= \int_0^\infty dx \left[\frac{\partial \exp(-sx) f(x)}{\partial x} - f(x) \frac{\partial \exp(-sx)}{\partial x} \right] \\
&= \int_0^\infty dx \left[\frac{\partial \exp(-sx) f(x)}{\partial x} + s f(x) \exp(-sx) \right] \\
&= \int_0^\infty dx\, \frac{\partial \exp(-sx) f(x)}{\partial x} + s \int_0^\infty dx\, f(x) \exp(-sx) \\
&= \exp(-sx) f(x)|_0^\infty + s \int_0^\infty dx\, f(x) \exp(-sx) \\
&= \exp(-sx) f(x)|_0^\infty + s\mathcal{L}[f](s).
\end{aligned}
$$

Supondo

$$
\lim_{x \to \infty} \exp(-sx) f(x) = 0,
$$

obtemos:

$$
\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0).
$$

6 Exemplo: Resolva a equação diferencial de primeira ordem seguinte usando as técnicas de transformada de Laplace (e sua inversa):

$$y'(x) + y(x) = 0,$$

sendo que $y(0) = 1$. Primeiro tomamos a transformada de Laplace desta equação:

$$\mathcal{L}[y' + y](s) = \mathcal{L}[0](s).$$

Notando que

$$\mathcal{L}[0](s) = 0,$$

notando a linearidade da transformada de Laplace e usando o Ex. 3, vem:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[y' + y](s) &= \mathcal{L}[y'](s) + \mathcal{L}[y](s) \\
&= s\mathcal{L}[y](s) - y(0) + \mathcal{L}[y](s) \\
&= (1+s)\mathcal{L}[y](s) - y(0).
\end{aligned}$$

Logo, a transformada de Laplace da equação diferencial dada fica:

$$(1+s)\mathcal{L}[y](s) - y(0) = 0,$$

isto é,

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{y(0)}{1+s}.$$

Usando o Ex. 2, obtemos:

$$\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[y]](x) = y(0)\,\mathcal{L}^{-1}[g](x),$$

onde

$$g(s) \equiv \frac{1}{1+s},$$

como no Ex. 2. Portanto,

$$y(x) = y(0)\exp(-x).$$

Com a condição para $y(0) = 1$, vem:

$$y(x) = \exp(-x).$$