No nosso caso, temos a matriz dos coeficientes, defeituosa, dada por

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Queremos encontrar uma matriz P inversível tal que

$$\begin{aligned} P^{-1}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}P &= \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

já que, para nossa matriz de coeficientes, como vimos, $\lambda = 1$ com multiplicade algébrica igual a 2, pois o auto-valor se repete duas vezes, e multiplicidade geométrica igual a 1, pois temos apenas um auto-vetor. A ideia, como no caso anterior onde encontramos a matriz T cujas colunas eram os auto-vetores, aqui teremos o único auto-vetor como uma das colunas e a outra coluna teremos que encontar. Então, escrevemos:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 1 & b \end{pmatrix},$$

onde usamos nosso único auto-vetor para $\lambda = 1$ como a primeira coluna:

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Agora impomos que temos a forma de Jordan, isto é,

$$P^{-1}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}P = P\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

já que

$$\begin{aligned} P^{-1}P &= \mathbb{I} \\ &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, usando nossa forma explícita para P, a equação acima fica:

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} 2 & 3a-4b \\ 1 & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2+a \\ 1 & 1+b \end{pmatrix},$$

isto é,

$$3a - 4b = 2 + a$$

e

$$a - b = 1 + b.$$

Resolvendo essas equações vemos que a primeira delas dá

$$2a = 4b + 2$$

e a segunda dá

$$a = 1 + 2b,$$

que é a mesma coisa. Podemos escolher, por exemplo, $a = 1$ e aí ficamos com $b = 0$. Obtemos, então, nossa matriz P, isto é,

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Seu determinante dá

$$\det(P) = -1 \neq 0$$

e, portanto, temos uma inversa. A co-fator é dada por

$$\operatorname{cof}(P) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

e a transposta desta co-fator é

$$[\operatorname{cof}(P)]^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Logo, a inversa é dada por

$$\begin{aligned} P^{-1} &= \frac{1}{\det(P)} [\operatorname{cof}(P)]^t \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vamos verificar que P^{-1} é, de fato, a inversa de P :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} P &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Excelente!

Agora, podemos multiplicar nossa equação diferencial original por P^{-1} pela esquerda, obtendo:

$$P^{-1}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Como P^{-1} não depende do tempo, podemos escrever também que

$$\frac{d}{dt}\left[P^{-1}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}\right] = P^{-1}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}P\left[P^{-1}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}\right].$$

onde também já usamos o fato que $P^{-1}P = PP^{-1} = \mathbb{I}$. Mas, encontramos P tal que

$$P^{-1}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vamos verificar isso:

$$\begin{aligned} P^{-1}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}P &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}P \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}P \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Logo, nossa equação diferencial agora fica assim:

$$\frac{d}{dt}\left[P^{-1}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\left[P^{-1}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}\right].$$

Como fizemos no exemplo anterior, da equação inomogênea, mas cuja matriz dos coeficientes não era defeituosa e pode ser diagonalizada, agora definimos:

$$\begin{pmatrix} r(t) \\ s(t) \end{pmatrix} \equiv P^{-1}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

e a equação agora fica deste jeito:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} r(t) \\ s(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r(t) \\ s(t) \end{pmatrix}.$$

Tudo o que temos a fazer agora é resolver duas equações diferenciais:

$$\frac{d}{dt}r(t) = r(t) + s(t)$$

e

$$\frac{d}{dt}s(t) = s(t).$$

Veja que, por causa de termos colocado a matriz dos coeficientes na forma canônica ou normal de Jordan, agora temos uma das equações desacoplada. Assim, resolvemos primeiro para $s(t)$, obtendo:

$$s(t) = c_1 \exp(t),$$

onde c_1 é uma constante arbitrária. Substituímos então este resultado na equação para $r(t)$, obtendo:

$$\frac{d}{dt} r(t) = r(t) + c_1 \exp(t).$$

Podemos usar nosso método usual para equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem e o fator integrante aqui é meramente $\exp(-t)$:

$$\frac{d}{dt}\left[\exp(-t)\, r(t)\right] = c_1.$$

Integrando, obtemos:

$$\exp(-t)\, r(t) = c_2 + c_1 t,$$

onde c_2 é outra constante arbitrária. Portanto,

$$r(t) = c_2 \exp(t) + c_1 t \exp(t).$$

Logo,

$$\begin{pmatrix} r(t) \\ s(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 \exp(t) + c_1 t \exp(t) \\ c_1 \exp(t) \end{pmatrix}.$$

Mas, como

$$\begin{pmatrix} r(t) \\ s(t) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

segue que

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= P \begin{pmatrix} r(t) \\ s(t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(t) \\ s(t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 \exp(t) + c_1 t \exp(t) \\ c_1 \exp(t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2c_2 \exp(t) + 2c_1 t \exp(t) + c_1 \exp(t) \\ c_2 \exp(t) + c_1 t \exp(t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2c_2 + c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \exp(t) + c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t \exp(t) \\
&= c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(t) + c_1 \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t \exp(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(t) \right].
\end{aligned}$$

Veja que a solução do livro é um pouco diferente, mas só porque os nomes das constantes estão trocados, nosso par (c_1, c_2) corresponde ao par (c_2, c_1) do livro. Pronto, temos então a solução geral da equação homogênea dada, que tem uma matriz de coeficientes defeituosa.