Podemos construir uma matriz cujas colunas são dadas por esses dois auto-vetores:

$$T \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Como suas colunas não são linearmente dependentes, seu determinante não é nulo e esta matriz tem uma inversa. Note que

$$\begin{aligned} \det(T) &= 3-1 \\ &= 2 \neq 0 \end{aligned}$$

e, portanto, pode ser invertida. A matriz chamada de co-fator de T é dada por

$$\mathrm{cof}(T) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e sua transposta é dada por

$$[\mathrm{cof}(T)]^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim, a inversa fica:

$$\begin{aligned} T^{-1} &= \frac{1}{\det(T)}[\mathrm{cof}(T)]^t \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vamos verificar então:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} T &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3-1 & 3-3 \\ -1+1 & -1+3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

como deveria ser.

Agora nós mudamos de variáveis fazendo o seguinte. Multiplicamos a equação dada pela esquerda por T^{-1}, obtendo:

$$T^{-1}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = T^{-1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + T^{-1}\begin{pmatrix} \exp(t) \\ t \end{pmatrix}.$$

Como aqui temos coeficientes constantes, nós podemos reescrever esta equação como

$$\frac{d}{dt}\left[T^{-1}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}\right] = T^{-1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + T^{-1}\begin{pmatrix} \exp(t) \\ t \end{pmatrix}.$$

Veja que o produto TT^{-1} dá a matriz identidade e, portanto, podemos sempre escrever

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} TT^{-1}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} T\left[T^{-1}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}\right].\end{aligned}$$

Podemos, portanto, definir novas variáveis assim:

$$\begin{pmatrix} r(t) \\ s(t) \end{pmatrix} \equiv T^{-1}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

e nossa equação original agora fica assim:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} r(t) \\ s(t) \end{pmatrix} = T^{-1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} T\left[T^{-1}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}\right] + T^{-1}\begin{pmatrix} \exp(t) \\ t \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} r(t) \\ s(t) \end{pmatrix} = T^{-1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} T\begin{pmatrix} r(t) \\ s(t) \end{pmatrix} + T^{-1}\begin{pmatrix} \exp(t) \\ t \end{pmatrix}.$$

O grande negócio aqui é o que dá a seguinte multiplicação:

$$\begin{aligned}T^{-1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} T &= T^{-1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= T^{-1}\begin{pmatrix} 2-1 & 2-3 \\ 3-2 & 3-6 \end{pmatrix} \\ &= T^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3-1 & -3+3 \\ -1+1 & 1-3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Você viu?! Obtivemos uma matriz diagonal com os nossos auto-valores ao longo da diagonal principal. Portanto, diagonalizamos a matriz dos coeficientes. É esse processo que é chamado de diagonalização.

Agora, nossa equação fica assim:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} r(t) \\ s(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r(t) \\ s(t) \end{pmatrix} + T^{-1}\begin{pmatrix} \exp(t) \\ t \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(t) \\ s(t) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(t) \\ t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(t) \\ s(t) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3\exp(t) - t \\ -\exp(t) + t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} r(t) \\ -s(t) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3\exp(t) - t \\ -\exp(t) + t \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

ou ainda,

$$\frac{d}{dt} r(t) = r(t) + \frac{1}{2}\left[3\exp(t) - t\right]$$

e

$$\frac{d}{dt} s(t) = -s(t) + \frac{1}{2}\left[-\exp(t) + t\right].$$

Vemos, portanto, que desacoplamos as equações que antes eram acopladas.

Para resolver cada uma das duas equações, usamos o método do fator integrante. A primeira fica:

$$\frac{d}{dt}\left[\exp(-t)\, r(t)\right] = \frac{1}{2}\left[3 - t\exp(-t)\right]$$

e, portanto,

$$\exp(-t)\, r(t) = c_1 + \frac{3}{2} t + \frac{1}{2} t \exp(-t) + \frac{1}{2}\exp(-t),$$

isto é,

$$r(t) = c_1 \exp(t) + \frac{3}{2} t \exp(t) + \frac{1}{2} t + \frac{1}{2}.$$

A segunda das equações fica:

$$\frac{d}{dt}\left[\exp(t)\, s(t)\right] = \frac{1}{2}\left[-\exp(2t) + t\exp(t)\right]$$

e, assim,

$$\exp(t)\, s(t) = c_2 - \frac{1}{4}\exp(2t) + \frac{1}{2} t \exp(t) - \frac{1}{2}\exp(t),$$

ou seja,

$$s(t) = c_2 \exp(-t) - \frac{1}{4}\exp(t) + \frac{1}{2} t - \frac{1}{2}.$$

Em termos matriciais, a solução geral transformada fica:

$$\begin{pmatrix} r(t) \\ s(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \exp(t) + \frac{3}{2} t \exp(t) + \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} \\ c_2 \exp(-t) - \frac{1}{4}\exp(t) + \frac{1}{2} t - \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

A solução para as funções $x(t)$ e $y(t)$ são agora obtidas com a multiplicação pela matriz T, assim:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= T \begin{pmatrix} r(t) \\ s(t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \exp(t) + \frac{3}{2} t \exp(t) + \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} \\ c_2 \exp(-t) - \frac{1}{4} \exp(t) + \frac{1}{2} t - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c_1 \exp(t) + \frac{3}{2} t \exp(t) + \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} + c_2 \exp(-t) - \frac{1}{4} \exp(t) + \frac{1}{2} t - \frac{1}{2} \\ c_1 \exp(t) + \frac{3}{2} t \exp(t) + \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} + 3 c_2 \exp(-t) - \frac{3}{4} \exp(t) + \frac{3}{2} t - \frac{3}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c_1 \exp(t) + c_2 \exp(-t) + \frac{3}{2} t \exp(t) - \frac{1}{4} \exp(t) + t \\ c_1 \exp(t) + 3 c_2 \exp(-t) + \frac{3}{2} t \exp(t) - \frac{3}{4} \exp(t) + 2t - 1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= c_1 \exp(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \exp(-t) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} t \exp(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&\quad - \frac{1}{4} \exp(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Um caso mais difícil (um caso que é "famigerado")

Vamos agora olhar para o problema 1 da página 436 do livro do Boyce et al. Neste caso, temos uma equação homogênea:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Este é um caso diferente porque só vamos ter um auto-vetor. Para ver isso, vamos primeiro encontrar os auto-valores:

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & -4 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

isto é,

$$(3 - \lambda)(-1 - \lambda) + 4 = 0,$$

ou seja,

$$\lambda^2 + \lambda - 3\lambda - 3 + 4 = 0,$$

ou ainda,

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0,$$

cuja solução é

$$\begin{aligned}
\lambda_\pm &= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Então, só temos um único auto-valor. Vejamos se ainda assim teresmo dois auto-vetores:

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0,$$

isto é,

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0,$$

ou seja,

$$2\alpha - 4\beta = 0$$

e

$$\alpha - 2\beta = 0,$$

ou seja, ambas são a mesma equação:

$$\alpha = 2\beta.$$

Escolhendo $\beta = 1$, segue que $\alpha = 2$ e temos apenas um auto-vetor:

$$u \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, uma solução da equação é dada por

$$\begin{aligned} v_1(t) &= c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(\lambda t) \\ &= c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(t). \end{aligned}$$

Só para conferir que isto está correto, calculemos a derivada:

$$\frac{d}{dt} v_1(t) = v_1(t)$$

e como o auto-valor λ é a unidade, segue que

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} v_1(t) = v_1(t),$$

que, substituindo em nossa derivada, segue que

$$\frac{d}{dt} v_1(t) = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} v_1(t),$$

confirmando que $v_1(t)$ é, de fato, uma solução para nossa equação diferencial matricial. Precisamos encontrar outra solução linearmente independente a esta, pois são necessárias duas constantes arbitrárias neste caso 2×2.

Mas tem um truque que sempre vale para matrizes quadradas, mesmo essas que são defeituosas e não podem ser diagonalizadas. É que o Jordan, matemático, encontrou a chamada forma de Jordan e que tem a ver com um jeito de lidar com matrizes que não podem ser diagonalizadas. Sempre teremos um auto-vetor, mas nem sempre teremos mais auto-vetores com auto-valores diferentes, pois podemos ter um bloco da matriz que não é diagonalizável. Como exemplo, considere uma matriz 6×6, de tal forma que tenha só três auto-valores distintos sendo que um deles se repete três vezes e outro se repete duas vezes, sobrando só um que não se repete. Os que se repetem são chamados de auto-valores degenerados e o que não se repete é chamado de não degenerado. Então, pode ocorrer que os dois blocos degenerados sejam de tal forma que não possam ser diagonalizados, ou seja, a matriz é defeituosa. Uma matriz simétrica ou, quando complexa, hermitiana é sempre diagonalizável. Mas quando não for ou simétrica ou hermitiana, então pode ser ou não diagonalizável. No caso em que temos a nossa matriz com dois auto-valores degenerados e que seus blocos degenarados não possam ser diagonalizados, 6×6, podemos colocá-la sempre na forma de Jordan, dando:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Temos um bloquinho não diagonalizável 2×2 na forma de Jordan,

$$B_{2\times 2} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix},$$

e outro, também não diagonalizável, 3×3 também na forma de Jordan,

$$B_{3\times 3} = \begin{pmatrix} \lambda_3 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

O bloquinho 1×1 do auto-valor não degenerado λ_2 é diagonal, obvia e trivialmente. Demonstrar que sempre podemos colocar uma matriz quadrada na forma de Jordan é chato e leva tempo. Então, se você tiver interesse, dê uma procurada até na Wikipedia que você encontrará imensa literatura a respeito. Aqui, como nós só vamos usar matrizes 2×2 ou, no máximo, 3×3, nosso exemplo acima vai exaurir toda dificuldade que possa surgir durante exercícios do livro do Boyce et al.