Sistemas de equações diferenciais

Vamos apresentar agora um exemplo de sistema de equações diferenciais que advém da formulação hamiltoniana da mecânica clássica. A segunda lei de Newton para uma força conservativa é escrita como

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\partial V(x)}{\partial x},$$

onde V é a energia potencial da partícula de massa m. Podemos definir a função lagrangiana assim:

$$L = T(\dot{x}) - V(x),$$

onde T é a energia cinética. Então,

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2,$$

com

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt}.$$

Com esta definição, vemos que

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= m\frac{d\dot{x}}{dt} \\ &= \frac{d}{dt}(m\dot{x}) \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right). \end{aligned}$$

Mas, vemos também que

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial x}.$$

Com isto, vemos que segunda lei de Newton pode ser escrita em termos da lagrangeana assim:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x},$$

isto é,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0,$$

que a equação de Euler & Lagrange. Se, ao invés de utilizarmos esta equação, que é de segunda ordem no tempo, expressa em termos da configuração do sistema, isto é, da posição da partícula, utilizarmos as equações de Hamilton, teremos um sistema de duas equações acopladas de primeira ordem no tempo. Para vermos isto, consideremos o formalismo hamiltoniano. Seja a hamiltoniana definida como:

$$H \equiv p\dot{x}(p) - L,$$

onde, agora, definimos o momentum conjugado a x como

$$p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$$

e expressamos $\dot{x}$ em termos de p. Calculemos então:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \\ &= \frac{\partial}{\partial \dot{x}}(T - V) \\ &= \frac{\partial}{\partial \dot{x}} T \\ &= \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) \\ &= m\dot{x} \end{aligned}$$

e, assim,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{p}{m} \\ &= \dot{x}(p). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} H &= p\frac{p}{m} - T(\dot{x}) + V(x) \\ &= p\frac{p}{m} - \frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m}\right)^2 + V(x) \\ &= \frac{1}{2}\frac{p^2}{m} + V(x), \end{aligned}$$

que, neste caso, é igual à energia total do sistema.

No formalismo hamiltoniano, agora temos duas equações movimento, mas de primeira ordem no tempo:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H(x,p)}{\partial x}$$

e

$$\dot{x} = \frac{\partial H(x,p)}{\partial p},$$

que são as equações de Hamilton. Explicitamente, temos:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial V(x)}{\partial x}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m}.$$

Veja que, substituindo esta segunda equação, na forma

$$p = m\frac{dx}{dt},$$

de volta na primeira equação, temos a lei de Newton:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\partial V(x)}{\partial x}.$$

Logo, este exemplo sofisticado, nos permite considerar, por exemplo, nossas equações de segunda ordem como se fossem a lei de Newton reexpressa em termos de equações de Hamilton. Um jeito trival de fazer isso seria este:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p(t)\frac{dx}{dt} + q(t)x = 0.$$

Seja

$$y(t) \equiv \frac{dx}{dt}.$$

Então, teremos um sistema de equações de primeira ordem acopladas:

$$\frac{dx}{dt} = y$$

e

$$\frac{dy}{dt} = -p(t)y - q(t)x.$$

Sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem

Seja o sistema de duas equações diferenciais acopladas:

$$\frac{d}{dt}x(t) = a_{11}(t)x(t) + a_{12}(t)y(t) + f(t)$$

e

$$\frac{d}{dt}y(t) = a_{21}(t)x(t) + a_{22}(t)y(t) + g(t).$$

Em termos matriciais, também podemos escrever

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}.$$

Este é um sistema que pode não ter coeficientes independentes do tempo, já que $a_{mn}(t)$, para $m, n = 1, 2$, podem todos depender do tempo. No entanto, aqui, neste curso, vamos resolver o problema 2×2 acima e vamos considerar apenas coeficientes independentes do tempo. Com isso, você poderá facilmente resolver todos os problemas desde o 1 até o 12 das páginas 447 e 448 do livro do Boyce et al. E, com um pouco de cuidado, poderá até resolver os problemas desde o 14 até o 16 da página 448. Esses são problemas do fim do capítulo sobre sistemas de equações diferenciais ordinárias inomogêneas.

Caso de coeficientes constantes

Neste caso, a equação diferencial matricial acima pode ser escrita como

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix},$$

onde agora a_{mn}, para $m, n = 1, 2$, são constantes. O que fizermos a seguir pode ser generalizado para o caso de sistemas maiores, mas nós vamos nos restringir a sistemas quadrados, isto é, quando a matriz de coeficientes é quadrada. A ideia aqui é lembrar do problema que já resolvemos quando temos apenas uma equação diferencial linear de primeira ordem. Precisamos, de alguma forma, encontrar um fator integrante, mesmo que, neste caso, o fator integrante seja uma matriz.

Ao invés de apresentar toda a teoria do capítulo 7 do livro do Boyce et al, vamos aqui resolver o problema 1 da página 447 desse livro. Vamos resolver passo a passo para poder estabelecer um algoritmo prático para a resolução desse tipo de problema. O problema é encontrar a solução geral da equação inomogênia:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \exp(t) \\ t \end{pmatrix}.$$

Note que a matriz dos coeficientes,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

não é diagonal e nem simétrica. Precisamos, então, tentar diagonalizá-la. Para isso, precisamos encontrar as soluções para λ na equação:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

isto é,

$$(2-\lambda)(-2-\lambda) + 3 = 0,$$

ou seja,

$$\lambda^2 - (2-2)\lambda - 4 + 3 = 0,$$

ou ainda,

$$\lambda^2 = 1.$$

Há, portanto, dois auto-valores distintos:

$$\lambda_\pm = \pm 1.$$

O próximo passo é encontrar os correspondentes auto-vetores. Para isso, escrevemos:

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 3 & -2-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0,$$

isto é,

$$(2-\lambda)\alpha - \beta = 0$$

e

$$3\alpha - (2+\lambda)\,\beta \quad = \quad 0.$$

Da primeira dessas duas equações, obtemos

$$\beta \quad = \quad (2-\lambda)\,\alpha.$$

Para simplificar, vamos tomar

$$\alpha \quad = \quad 1$$

e aí teremos

$$\beta \quad = \quad 2-\lambda.$$

Podemos até substituir esses valores na segunda das equações acima e verificar que, para nossos auto-valores, a segunda equação também é automaticamente satisfeita.

Temos, portanto, dois auto-vetores:

$$\begin{aligned} u_+ \quad &= \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2-\lambda_+ \end{pmatrix} \\ &= \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} u_- \quad &= \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2-\lambda_- \end{pmatrix} \\ &= \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Note que estes auto-vetores são linearmente independentes, mas não são ortogonais.