Teorema 3.5.2

A solução geral da equação diferencial inomogênea

$$L[y] = g(t),$$

com

$$L[y] = \frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)\,y,$$

pode ser escrita na forma

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + Y(t),$$

onde y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções da equação homogênea

$$L[y] = 0,$$

c_1 e c_2 são constantes arbitrárias e Y é alguma solução específica da equação inomogênea dada.

Para ver isso, basta usar o Teorema 3.5.1.

O método de variação de parâmetros (ou de "variação de constantes", que é um termo inadequado, já que constante não varia)

Teorema 3.6.1

Considere a equação diferencial inomogênea

$$L[y] = g(t),$$

com

$$L[y] = \frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)\,y.$$

Segue do Teorema 3.5.2 que a solução geral desta equação inomogênea é dada por

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + Y(t),$$

onde y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções da equação homogênea

$$L[y] = 0,$$

c_1 e c_2 são constantes arbitrárias e Y é alguma solução específica da equação inomogênea dada. O presente teorema simplesmente fornece a seguinte solução particular Y para ser usada na expressão de $y(t)$ dada acima:

$$Y(t) = -y_1(t)\int_{t_0}^{t} ds\,\frac{y_2(s)\,g(s)}{W[y_1,y_2](s)} + y_2(t)\int_{t_0}^{t} ds\,\frac{y_1(s)\,g(s)}{W[y_1,y_2](s)}, \tag{1}$$

onde t_0 é qualquer ponto conveniente no intervalo em que a equação dada é válida.

Para demonstrar este teorema, nós simplesmente tomamos as duas primeiras derivadas de $Y(t)$ com relação a t e, juntamente com $Y(t)$, as substituímos na equação diferencial homogênea dada. Então, façamos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}Y(t) &= -\frac{dy_1(t)}{dt}\int_{t_0}^{t} ds\,\frac{y_2(s)\,g(s)}{W[y_1,y_2](s)} + \frac{dy_2(t)}{dt}\int_{t_0}^{t} ds\,\frac{y_1(s)\,g(s)}{W[y_1,y_2](s)} \\ &\quad -y_1(t)\,\frac{y_2(t)\,g(t)}{W[y_1,y_2](t)} + y_2(t)\,\frac{y_1(t)\,g(t)}{W[y_1,y_2](t)} \\ &= -\frac{dy_1(t)}{dt}\int_{t_0}^{t} ds\,\frac{y_2(s)\,g(s)}{W[y_1,y_2](s)} + \frac{dy_2(t)}{dt}\int_{t_0}^{t} ds\,\frac{y_1(s)\,g(s)}{W[y_1,y_2](s)} \qquad (2)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}Y(t) &= -\frac{d^2y_1(t)}{dt^2}\int_{t_0}^{t} ds\,\frac{y_2(s)\,g(s)}{W[y_1,y_2](s)} + \frac{d^2y_2(t)}{dt^2}\int_{t_0}^{t} ds\,\frac{y_1(s)\,g(s)}{W[y_1,y_2](s)} \\ &\quad -\frac{dy_1(t)}{dt}\frac{y_2(t)\,g(t)}{W[y_1,y_2](t)} + \frac{dy_2(t)}{dt}\frac{y_1(t)\,g(t)}{W[y_1,y_2](t)} \\ &= -\frac{d^2y_1(t)}{dt^2}\int_{t_0}^{t} ds\,\frac{y_2(s)\,g(s)}{W[y_1,y_2](s)} + \frac{d^2y_2(t)}{dt^2}\int_{t_0}^{t} ds\,\frac{y_1(s)\,g(s)}{W[y_1,y_2](s)} \\ &\quad +\frac{y_1(t)\,\frac{dy_2(t)}{dt} - y_2(t)\,\frac{dy_1(t)}{dt}}{W[y_1,y_2](t)}g(t) \\ &= -\frac{d^2y_1(t)}{dt^2}\int_{t_0}^{t} ds\,\frac{y_2(s)\,g(s)}{W[y_1,y_2](s)} + \frac{d^2y_2(t)}{dt^2}\int_{t_0}^{t} ds\,\frac{y_1(s)\,g(s)}{W[y_1,y_2](s)} \\ &\quad +g(t) \qquad (3)\end{aligned}$$

Veja que

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} = -p(t)\,\frac{dy_1}{dt} - q(t)\,y_1$$

e

$$\frac{d^2y_2}{dt^2} = -p(t)\,\frac{dy_2}{dt} - q(t)\,y_2,$$

já que, por definição,

$$L[y_1] = 0$$

e

$$L[y_2] = 0.$$

Assim, nossa segunda derivada de Y acima, Eq. (3), fica

$$\frac{d^2}{dt^2}Y(t) = p(t)\,\frac{dy_1(t)}{dt}\int_{t_0}^{t} ds\,\frac{y_2(s)\,g(s)}{W[y_1,y_2](s)}$$

$$
\begin{aligned}
&+q\left(t\right)y_1\left(t\right)\int_{t_0}^{t}ds\,\frac{y_2\left(s\right)g\left(s\right)}{W\left[y_1,y_2\right]\left(s\right)}\\
&-p\left(t\right)\frac{dy_2\left(t\right)}{dt}\int_{t_0}^{t}ds\,\frac{y_1\left(s\right)g\left(s\right)}{W\left[y_1,y_2\right]\left(s\right)}\\
&-q\left(t\right)y_2\left(t\right)\int_{t_0}^{t}ds\,\frac{y_1\left(s\right)g\left(s\right)}{W\left[y_1,y_2\right]\left(s\right)}\\
&+g\left(t\right),
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}Y\left(t\right) &= p\left(t\right)\left\{\frac{dy_1\left(t\right)}{dt}\int_{t_0}^{t}ds\,\frac{y_2\left(s\right)g\left(s\right)}{W\left[y_1,y_2\right]\left(s\right)}-\frac{dy_2\left(t\right)}{dt}\int_{t_0}^{t}ds\,\frac{y_1\left(s\right)g\left(s\right)}{W\left[y_1,y_2\right]\left(s\right)}\right\}\\
&+q\left(t\right)\left\{y_1\left(t\right)\int_{t_0}^{t}ds\,\frac{y_2\left(s\right)g\left(s\right)}{W\left[y_1,y_2\right]\left(s\right)}-y_2\left(t\right)\int_{t_0}^{t}ds\,\frac{y_1\left(s\right)g\left(s\right)}{W\left[y_1,y_2\right]\left(s\right)}\right\}\\
&+g\left(t\right).
\end{aligned}
$$

Substituindo as Eqs. (1) e (2) nesta equação, vemos que

$$
\frac{d^2}{dt^2}Y\left(t\right) = -p\left(t\right)\frac{dY\left(t\right)}{dt}-q\left(t\right)Y\left(t\right)+g\left(t\right),
$$

ou seja,

$$
\frac{d^2}{dt^2}Y\left(t\right)+p\left(t\right)\frac{dY\left(t\right)}{dt}+q\left(t\right)Y\left(t\right) = g\left(t\right).
$$

Assim, como vemos, $Y\left(t\right)$ dada pela Eq. (1) é, de fato, uma solução particular da equação diferencial dada e, portanto, este teorema está demonstrado.