## Teorema 3.2.4

Considere a seguinte equação homogênea:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)\,y \quad = \quad 0.$$

Seja

$$L[y] \quad \equiv \quad \frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)\,y.$$

Considre o conjunto de combinações lineares

$$y \quad \equiv \quad c_1y_1 + c_2y_2,$$

para todas as constantes $c_1$ e $c_2$ e para um par de funções $y_1$ e $y_2$ tais que

$$L[y_1] \quad = \quad 0$$

e

$$L[y_2] \quad = \quad 0.$$

Então, esse conjunto de combinações lineares contém todas as soluções possíveis **se e somente se** existir um ponto $t_0$ no intervalo onde vale a equação dada tal que

$$W[y_1, y_2](t_0) \quad \neq \quad 0.$$

Para demonstrarmos isto, consideremos uma solução arbitrária do problema $\phi(t)$, satisfazendo, em algum valor de $t$, condições iniciais dadas. Por exemplo, seja $\phi(t)$ solução da equação dada, isto é,

$$L[\phi] \quad = \quad 0,$$

e que, para $t_1$ satisfaz

$$\phi(t_1) \quad = \quad \phi_1$$

e

$$\phi'(t_1) \quad = \quad \phi_1'.$$

Seja, então,

$$y(t) \quad \equiv \quad c_1y_1(t) + c_2y_2(t).$$

Queremos demonstrar, resumidamente, que

$$W[y_1, y_2](t_0) \quad \neq \quad 0$$

se e somente se

$$y(t) \quad = \quad \phi(t).$$

Vamos então supor válido que

$$W\left[y_1, y_2\right](t_0) \quad \neq \quad 0,$$

mesmo que

$$t_0 \quad \neq \quad t_1.$$

Como temos a solução $\phi(t)$, podemos também calculá-la em $t_0$, pois, por hipótese, implicitamente, $t_1$ e $t_0$ estão no mesmo intervalo de validade da equação e das soluções. Também podemos tomar $\phi'(t)$ e calculá-la em $t_0$. Dentre todas as combinações lineares

$$y(t) \quad \equiv \quad c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t),$$

consideremos se é possível encontar $c_1$ e $c_2$ tais que

$$y(t_0) \quad = \quad \phi(t_0)$$

e

$$y'(t_0) \quad = \quad \phi'(t_0)?$$

Pelo teorema 3.2.3, a resposta é positiva, temos $c_1$ e $c_2$ tais que estas duas equações são satisfeitas, já que

$$W\left[y_1, y_2\right](t_0) \quad \neq \quad 0.$$

Pelo teorema 3.2.1, $\phi(t)$ é única, isto é, poderíamos tê-la especificado tomando como condições iniciais, não em $t_1$, mas em $t_0$. Mas, como $y(t)$ é também especificada com condições iniciais em $t_0$, pelo mesmo teorema 3.2.1, é também única. Logo, como temos duas soluções $y$ e $\phi$, da mesma equação diferencial, satisfazendo as mesmas condições inicais, essas duas soluções são, na verdade, a mesma. Logo a solução é única e, portanto,

$$y(t) \quad = \quad \phi(t).$$

Neste caso, dizemos que $y_1$ e $y_2$ formam um **conjunto fundamental** de soluções da equação dada.

# Teorema 3.2.5

Considere a seguinte equação homogênea:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)\,y \quad = \quad 0.$$

Seja

$$L[y] \quad \equiv \quad \frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)\,y.$$

Seja $y_1$ uma das soluções satisfazendo

$$y_1(t_0) \quad = \quad 1$$

e

$$y_1'(t_0) = 0.$$

Seja $y_2$ uma das soluções satisfazendo

$$y_2(t_0) = 0$$

e

$$y_2'(t_0) = 1.$$

Então, neste caso $y_1$ e $y_2$ formam um **conjunto fundamental** de soluções da equação dada.

## Teorema 3.2.6

Dada a equação diferencial

$$L[y] = 0,$$

com

$$L[y] = \frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)y,$$

com $p(t), q(t) \in \mathbb{R}$ e contínuas, então, se

$$y = u(t) + iv(t)$$

é uma solução complexa da equação dada, segue que tanto sua parte real, $u(t)$, como sua parte imaginária, $v(t)$, são também soluções da mesma equação.

Para vermos isto, basta tomarmos:

$$L[u+iv] = L[u] + iL[v],$$

já que $L$ é um operador linear. Como $p(t), q(t) \in \mathbb{R}$, então $L[u] \in \mathbb{R}$ e $L[v] \in \mathbb{R}$. Uma vez que, por hipótese,

$$L[y] = 0,$$

então segue que

$$L[u] = 0$$

e

$$L[v] = 0.$$

## Teorema 3.2.7 (teorema de Abel)

Se $y_1$ e $y_2$ são soluções da equação diferencial

$$L[y] = 0,$$

com

$$L[y] = \frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)\,y,$$

então o Wronskiano $W[y_1, y_2](t)$ é dado por

$$W[y_1, y_2](t) = c\exp\left[-\int dt\, p(t)\right],$$

onde $c$ é uma constante que depende de $y_1$ e $y_2$, mas não de $t$. Além disso, $W[y_1, y_2](t)$ ou é zero para todo $t$ (se $c = 0$) ou nunca é zero (se $c \neq 0$) no intervalo onde a equação acima é válida.

Para ver isto, consideremos a hipótese do teorema de que

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} + p(t)\frac{dy_1}{dt} + q(t)\,y_1 = 0$$

e

$$\frac{d^2y_2}{dt^2} + p(t)\frac{dy_2}{dt} + q(t)\,y_2 = 0.$$

Multiplicando a primeira por $y_2$ e a segunda por $y_1$ e subtraindo, obtemos:

$$y_2\frac{d^2y_1}{dt^2} + p(t)\,y_2\frac{dy_1}{dt} + q(t)\,y_2y_1 = 0$$

e

$$y_1\frac{d^2y_2}{dt^2} + p(t)\,y_1\frac{dy_2}{dt} + q(t)\,y_1y_2 = 0,$$

isto é,

$$y_2\frac{d^2y_1}{dt^2} - y_1\frac{d^2y_2}{dt^2} + p(t)\left(y_2\frac{dy_1}{dt} - y_1\frac{dy_2}{dt}\right) = 0. \tag{1}$$

Mas note que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(y_2\frac{dy_1}{dt} - y_1\frac{dy_2}{dt}\right) &= \frac{dy_2}{dt}\frac{dy_1}{dt} + y_2\frac{d^2y_1}{dt^2} - \frac{dy_1}{dt}\frac{dy_2}{dt} - y_1\frac{d^2y_2}{dt^2} \\
&= y_2\frac{d^2y_1}{dt^2} - y_1\frac{d^2y_2}{dt^2}
\end{aligned}$$

e que

$$y_2\frac{dy_1}{dt} - y_1\frac{dy_2}{dt} = -W[y_1, y_2](t).$$

Portanto, a Eq. (1) fica agora assim:

$$\frac{d}{dt}\{W[y_1, y_2](t)\} + p(t)\{W[y_1, y_2](t)\} = 0.$$

Mas a solução desta equação diferencial nós já sabemos:

$$W[y_1, y_2](t) = \exp\left[-\int_{t_0}^{t} dt'\, p(t')\right] W[y_1, y_2](t_0),$$

que pode ser verificada fazendo a derivada com relação a $t$, ou seja,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\{W[y_1, y_2](t)\} &= -p(t)\exp\left[-\int_{t_0}^{t} dt'\, p(t')\right] W[y_1, y_2](t_0) \\ &= -p(t)\{W[y_1, y_2](t)\}\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\frac{d}{dt}\{W[y_1, y_2](t)\} + p(t)\{W[y_1, y_2](t)\} = 0.$$

Como podemos escolher $t_0$ em qualquer lugar do intervalo de validade da equação, podemos escolher como sendo onde $W[y_1, y_2](t_0) \neq 0$, caso haja um tal ponto $t_0$ onde o Wronskiano seja não nulo. Aí, nossa solução nunca é zero, pois a exponencial nunca é zero. E veja também que, pela definição,

$$W[y_1, y_2](t_0) = -\left[y_2\frac{dy_1}{dt} - y_1\frac{dy_2}{dt}\right]_{t=t_0},$$

mostrando que $W[y_1, y_2](t_0)$, embora não dependa de $t$, depende de $y_1$ e $y_2$. Como temos

$$\int_{t_0}^{t} dt'\, p(t') = F(t) - F(t_0),$$

com qualquer primitiva $F$ de $p$, isto é,

$$\frac{dF(t)}{dt} = p(t),$$

temos então que

$$\exp\left[-\int_{t_0}^{t} dt'\, p(t')\right] = \exp[-F(t)]\exp[F(t_0)].$$

Assim, nossa solução pode agora ser reescrita como

$$\begin{aligned}W[y_1, y_2](t) &= \exp[-F(t)]\exp[F(t_0)]\, W[y_1, y_2](t_0) \\ &= c\exp[-F(t)],\end{aligned}$$

onde

$$c \equiv \exp[F(t_0)]\, W[y_1, y_2](t_0)$$

é independente de $t$, isto é, é uma constante que depende de $y_1$ e $y_2$. Note que, ignorando qualquer constante de integração, podemos tomar

$$F(t) = \int dt\, p(t),$$

isto é, como a integral indefinida de $p(t)$ sem somar constante alguma. Portanto, o teorema está agora demonstrado.

## Equações inomogêneas

## Teorema 3.5.1

Se $Y_1$ e $Y_2$ são duas soluções da equação inomogênea

$$L[y] = g(t),$$

com

$$L[y] = \frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)\,y,$$

então $Y_1 - Y_2$ é uma solução da equação homogênea correspondente, isto é,

$$L[Y_1 - Y_2] = 0.$$

Além disso, se $y_1$ e $y_2$ formam um conjunto fundamental de soluções da equação homogênea

$$L[y] = 0,$$

segue que

$$Y_1(t) - Y_2(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t),$$

onde $c_1$ e $c_2$ são certas constantes.

Para ver isso, basta usarmos a hipótese deste teorema, isto é,

$$L[Y_1] = g(t)$$

$$L[Y_2] = g(t).$$

Mas como $L$ é um operador linear, segue que

$$\begin{aligned} L[Y_1 - Y_2] &= L[Y_1] - L[Y_2] \\ &= g(t) - g(t) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 3.2.4, sabemos que qualquer solução da equação homogênea

$$L[y] = 0$$

pode ser expressa em termos de uma combinação linear de duas soluções que formem um conjunto fundamental de soluções e, portanto, como $y_1$ e $y_2$ são tais soluções, podemos escrever que

$$Y_1(t) - Y_2(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t),$$

para certas constantes $c_1$ e $c_2$, que dependerão de adicionais condições iniciais ao problema.