Equações diferenciais de segunda ordem, lineares e com coeficientes constantes

Considere a equação

$$a\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+cx \quad = \quad g\left(t\right),$$

onde a, b e c são constantes com $a\neq 0$. Esta equação é homogênia quando $g\left(t\right)\equiv 0$, $\forall t$, e é inomogênia quando $g\left(t\right)\neq 0$. Este tipo de equação diferencial é de segunda ordem, linear e com coeficientes $\left(a,b,c\right)$ constantes. A forma padrão que nós vamos usar é dividindo esta equação por a e definindo

$$p \quad \equiv \quad \frac{b}{a},$$

$$q \quad \equiv \quad \frac{c}{a}$$

e

$$f\left(t\right) \quad \equiv \quad \frac{g\left(t\right)}{a},$$

isto é,

$$\frac{d^2x}{dt^2}+p\frac{dx}{dt}+qx \quad = \quad f\left(t\right).$$

Note que temos o seguinte operador diferencial de segunda ordem:

$$\mathscr{L} \quad \equiv \quad \frac{d^2}{dt^2}+p\frac{d}{dt}+q.$$

Então, vemos que este operador é linear e a equação acima se escreve

$$\mathscr{L}x \quad = \quad f\left(t\right).$$

Note também que podemos pensar em uma classe de operadores diferenciais de primeira ordem assim:

$$\mathscr{D}_\alpha \quad \equiv \quad \frac{d}{dt}+\alpha.$$

Seria, então, possível termos:

$$\mathscr{L} \quad = \quad \mathscr{D}_\beta\mathscr{D}_\alpha,$$

com valores α e β escolhidos adequadamente? Para responder, façamos:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+p\frac{d}{dt}+q\right)y \quad = \quad \left[\left(\frac{d}{dt}+\beta\right)\left(\frac{d}{dt}+\alpha\right)\right]y,$$

para qualquer função $y = y(t)$. O primeiro membro dá:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + p\frac{d}{dt} + q\right) y = \frac{d^2 y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy.$$

O segundo membro dá:

$$\begin{aligned}
\left[\left(\frac{d}{dt} + \beta\right)\left(\frac{d}{dt} + \alpha\right)\right] y &= \left(\frac{d}{dt} + \beta\right)\left[\left(\frac{d}{dt} + \alpha\right) y\right] \\
&= \left(\frac{d}{dt} + \beta\right)\left(\frac{dy}{dt} + \alpha y\right) \\
&= \left(\frac{d}{dt} + \beta\right)\frac{dy}{dt} + \left(\frac{d}{dt} + \beta\right)\alpha y \\
&= \frac{d}{dt}\frac{dy}{dt} + \beta\frac{dy}{dt} + \frac{d\alpha y}{dt} + \beta\alpha y \\
&= \frac{d^2 y}{dt^2} + \beta\frac{dy}{dt} + \alpha\frac{dy}{dt} + \beta\alpha y \\
&= \frac{d^2 y}{dt^2} + (\alpha + \beta)\frac{dy}{dt} + \alpha\beta y.
\end{aligned}$$

Logo, teremos $\mathscr{L} = \mathscr{D}_\beta \mathscr{D}_\alpha$ resolvendo para α e β o seguinte sistema de duas equações a duas incógnitas:

$$\alpha + \beta = p$$

e

$$\alpha\beta = q.$$

Substituindo $\beta = q/\alpha$ na primeira equação, vem:

$$\alpha + \tfrac{q}{\alpha} = p,$$

isto é,

$$\alpha^2 - p\alpha + q = 0.$$

Há duas soluções para esta equação de segundo grau:

$$\alpha_\pm = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Lembre-se:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Logo, também temos:

$$\begin{aligned}
\beta_\pm &= \frac{q}{\alpha_\pm} \\
&= \frac{q}{\frac{p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}} \\
&= \frac{2q}{p\pm\sqrt{p^2-4q}}.
\end{aligned}$$

Vejamos, primeiro,

$$\begin{aligned}
\beta_+ &= \frac{2q}{p+\sqrt{p^2-4q}} \\
&= \frac{2q\left(p-\sqrt{p^2-4q}\right)}{\left(p+\sqrt{p^2-4q}\right)\left(p-\sqrt{p^2-4q}\right)} \\
&= \frac{2q\left(p-\sqrt{p^2-4q}\right)}{p^2-(p^2-4q)} \\
&= \frac{2q\left(p-\sqrt{p^2-4q}\right)}{p^2-p^2+4q} \\
&= \frac{2q\left(p-\sqrt{p^2-4q}\right)}{4q} \\
&= \frac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2} \\
&= \alpha_-.
\end{aligned}$$

E, analogamente,

$$\beta_- = \alpha_+.$$

Vemos, portanto, que há duas possíveis fatorizações do operador $\mathscr{L}$:

$$\mathscr{L} = \mathscr{D}_{\alpha_+}\mathscr{D}_{\alpha_-}$$

ou

$$\mathscr{L} = \mathscr{D}_{\alpha_-}\mathscr{D}_{\alpha_+},$$

isto é,

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+p\frac{d}{dt}+q\right) = \left(\frac{d}{dt}+\alpha_+\right)\left(\frac{d}{dt}+\alpha_-\right)$$

ou

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+p\frac{d}{dt}+q\right) = \left(\frac{d}{dt}+\alpha_-\right)\left(\frac{d}{dt}+\alpha_+\right),$$

onde

$$\alpha_{\pm} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Sendo assim, agora podemos reescrever nossa equação diferencial original,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p\frac{dx}{dt} + qx = f(t),$$

por exemplo, como

$$\left(\frac{d}{dt} + \alpha_-\right)\left(\frac{d}{dt} + \alpha_+\right)x(t) = f(t).$$

Definamos, então, uma nova incógnita:

$$y(t) \equiv \left(\frac{d}{dt} + \alpha_+\right)x(t).$$

Portanto, a equação para $y(t)$ fica:

$$\left(\frac{d}{dt} + \alpha_-\right)y(t) = f(t).$$

Exemplo meio degeneradinho: escolhendo um em que $4q = p^2$

Resolva a equação diferencial seguinte:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + x = \exp(-3t).$$

Vemos que

$$\begin{aligned} \alpha_{\pm} &= \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4}}{2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Logo, devemos resolver:

$$\left(\frac{d}{dt} + 1\right)\left(\frac{d}{dt} + 1\right)x(t) = \exp(-3t).$$

Definimos:

$$y(t) \equiv \left(\frac{d}{dt} + 1\right)x(t)$$

e resolvemos, primeiro,

$$\left(\frac{d}{dt} + 1\right)y(t) = \exp(-3t),$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt} y(t) + y(t) = \exp(-3t).$$

Tentemos um fator integrante:

$$\mu(t) \frac{d}{dt} y(t) + \mu(t) y(t) = \mu(t) \exp(-3t),$$

isto é,

$$\frac{d}{dt}[\mu(t) y(t)] - y(t) \frac{d}{dt} \mu(t) + \mu(t) y(t) = \mu(t) \exp(-3t).$$

Para achar qual é o fator integrante que vai simplicar esta equação diferencial, nós impomos que

$$-y(t) \frac{d}{dt} \mu(t) + \mu(t) y(t) = 0,$$

isto é,

$$y(t) \frac{d}{dt} \mu(t) = \mu(t) y(t),$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt} \mu(t) = \mu(t).$$

Mas, também podemos escrever:

$$\frac{d\mu(t)}{\mu(t)} = dt.$$

Integrando, obemos:

$$\int \frac{d\mu(t)}{\mu(t)} = \int dt,$$

isto é,

$$\ln|\mu(t)| = t + C,$$

onde C é uma constante arbitrária. Logo,

$$|\mu(t)| = \exp(t + C),$$

isto é,

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \pm \exp(C) \exp(t) \\ &= A \exp(t), \end{aligned}$$

onde $A \equiv \pm \exp(C)$ é uma constante multiplicativa arbitrária. O fator integrante para a equação diferencial dada acima, é simplesmente $\exp(t)$, já que a constante multiplicativa, qualquer que seja escolhida, será cancelada e, portanto, a tomamos como sendo 1. Com isto, a equação fica:

$$\exp(t)\left(\frac{d}{dt}+1\right)y(t) = \exp(t)\exp(-3t),$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}\left[\exp(t)\,y(t)\right] = \exp(-2t),$$

ou ainda,

$$\int d\left[\exp(t)\,y(t)\right] = \int \exp(-2t)\,dt.$$

Então, segue que

$$\exp(t)\,y(t) = -\frac{1}{2}\exp(-2t)+C_1,$$

onde C_1 é uma constante arbitrária. Assim,

$$y(t) = -\frac{1}{2}\exp(-3t)+C_1\exp(-t).$$

Mas,

$$y(t) \equiv \left(\frac{d}{dt}+1\right)x(t)$$

e, portanto, agora, para encontrar $x(t)$, substituímos nesta equação, a solução que obtivemos acima para $y(t)$, dando:

$$-\frac{1}{2}\exp(-3t)+C_1\exp(-t) = \left(\frac{d}{dt}+1\right)x(t),$$

cujo fator integrante, de novo, é $\exp(t)$. Com isto, temos:

$$\frac{d}{dt}\left[\exp(t)\,x(t)\right] = -\frac{1}{2}\exp(-2t)+C_1.$$

Integrando, temos:

$$\exp(t)\,x(t) = -\frac{1}{2}\int dt\,\exp(-2t)+C_1 t+C_2,$$

onde C_2 é uma segunda constante de integração e, portanto, arbitrária também, como C_1. Portanto,

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{1}{2}\exp(-t)\int dt\,\exp(-2t)+C_1 t\exp(-t)+C_2\exp(-t) \\ &= \frac{1}{4}\exp(-t)\exp(-2t)+C_1 t\exp(-t)+C_2\exp(-t), \end{aligned}$$

ou seja,

$$x(t) = \frac{1}{4}\exp(-3t)+C_1 t\exp(-t)+C_2\exp(-t).$$