Como encontramos $f(x,y)$? Simples, resolvemos duas equações parciais:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y),$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y).$$

Só isso. Segue um exemplo resolvido do livro de Boyce et al; é o de número 4, na página 100. Queremos resolver a equação diferencial

$$3xy + y^2 + \left(x^2 + xy\right)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Escrevendo no formato padrão com que começamos esta discussão, multiplicamos tudo por dx e obtemos

$$\left(3xy + y^2\right)dx + \left(x^2 + xy\right)dy = 0.$$

Logo, neste exemplo,

$$M(x,y) = 3xy + y^2$$

e

$$N(x,y) = x^2 + xy.$$

Usando nosso critério da Eq. (1),

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}N(x,y), \tag{1}$$

calculamos:

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = 3x + 2y$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) = 2x + y.$$

Nossa conclusão é que esta equação diferencial não é exata. Portanto, não há uma função f tal que $df = 0$ é equivalente a esta equação.

Há, porém, uma outra coisa podemos fazer para transformar, facilmente, em alguns casos, uma equação que não é exata em outra que seja. Neste exemplo, temos a equação que, como acabamos de ver, não é exata:

$$\left(3xy + y^2\right)dx + \left(x^2 + xy\right)dy = 0.$$

E se houver um fator integrante, $\mu(x)$, tal que quando multiplicamos por esta equação, obtemos uma equação diferencial exata? Isto é, será que há $\mu(x)$ tal que

$$\mu(x)\left(3xy + y^2\right)dx + \mu(x)\left(x^2 + xy\right)dy = 0$$

agora é uma equação exata? Para verificar isto, bata usarmos nosso critério miraculoso, isto é,

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}. \tag{2}$$

Tomemos

$$M(x,y) = \mu(x)\left(3xy + y^2\right)$$

e

$$N(x,y) = \mu(x)\left(x^2 + xy\right).$$

Agora, calculemos:

$$\frac{\partial}{\partial y} M(x,y) = \mu(x)(3x + 2y)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x} N(x,y) = \frac{d\mu(x)}{dx}\left(x^2 + xy\right) + \mu(x)(2x + y).$$

Para que estas duas equações sejam iguais, impomos que

$$\mu(x)(3x + 2y) = \frac{d\mu(x)}{dx}\left(x^2 + xy\right) + \mu(x)(2x + y),$$

isto é,

$$\frac{d\mu(x)}{dx}\left(x^2 + xy\right) = \mu(x)(3x + 2y - 2x - y),$$

ou seja,

$$\frac{d\mu(x)}{dx} x(x + y) = \mu(x)(x + y),$$

ou ainda,

$$\frac{d\mu(x)}{dx} x = \mu(x),$$

que queremos que a equação valha em todos os pontos do plano xy e, portanto, podemos tomar $x, y \neq 0$ e cancelar $x + y$ em ambos os membros. Lembre-se também que, aqui, x e y têm que ser vistas como duas variáveis independentes, para podermos falar de diferenciais de funções de duas variáveis independentes. Logo, podemos escrever a equação acima como

$$\frac{1}{\mu(x)} \frac{d\mu(x)}{dx} = \frac{1}{x},$$

isto é,

$$\frac{d \ln|\mu(x)|}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Integrando, dá

$$\ln |\mu(x)| = \ln |x| + K,$$

onde K é uma constante arbitrária. Para fatores integrantes, como já vimos em outro contexto, podemos tomar a constante arbitrária que aparece como sendo o valor que acharmos mais conveniente, e aqui tomamos como sendo zero. Com isso,

$$\ln |\mu(x)| = \ln |x|$$

e, exponenciando,

$$\mu(x) = \pm x.$$

Para fatores integrantes, por ser fatores, podemos simplesmente escolher qualquer constante multiplicativa e, como prefiro $+1$ ao invés de -1, vou escolher

$$\mu(x) = x.$$

Agora a nossa equação diferencial fica:

$$\mu(x)\left(3xy + y^2\right) dx + \mu(x)\left(x^2 + xy\right) dy = 0,$$

isto é,

$$\left(3x^2y + xy^2\right) dx + \left(x^3 + x^2y\right) dy = 0.$$

Neste caso,

$$M(x, y) = 3x^2y + xy^2$$

e

$$N(x, y) = x^3 + x^2y.$$

Vamos usar o critério dos milagres:

$$\frac{\partial}{\partial y} M(x, y) = 3x^2 + 2xy$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x} N(x, y) = 3x^2 + 2xy.$$

Como estas duas derivadas parciais são iguais, a nova equação diferencial é exata e só temos que encontrar uma função $f(x, y)$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= M(x, y) \\ &= 3x^2y + xy^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= N(x,y)\\ &= x^3+x^2y.\end{aligned}$$

Integrando a primeira delas com relação a x, obtemos:

$$f(x,y) = x^3y+\frac{1}{2}x^2y^2+g(y),$$

onde $g(y)$ é uma função que só depende de y. Agora integramos a segunda equação acima com relação a y e obtemos:

$$f(x,y) = x^3y+\frac{1}{2}x^2y^2+h(x),$$

onde $h(x)$ é uma função que só depende de x. Mas como $f(x,y)=f(x,y)$, para todo valor de x e y, então temos que ter

$$x^3y+\frac{1}{2}x^2y^2+g(y) = x^3y+\frac{1}{2}x^2y^2+h(x),$$

isto é,

$$g(y) = h(x).$$

A única solução plausível para esta equação, enfim, é que

$$\begin{aligned}g &= h\\ &= C',\end{aligned}$$

onde C' é uma constante arbitrária. Portanto, nossa função $f(x,y)$ é dada por

$$f(x,y) = x^3y+\frac{1}{2}x^2y^2+C'.$$

A equação diferencial que temos que resolver é, portanto,

$$df = 0,$$

que é equivalente a termos

$$f = C'',$$

onde C'' é uma constante arbitrária. Nossa família de soluções é, finalmente, dada por

$$x^3y+\frac{1}{2}x^2y^2+C' = C'',$$

isto é,

$$x^3y+\frac{1}{2}x^2y^2 = C,$$

com

$$C \equiv -C' + C''$$

uma constante arbitrária. Se quisermos y como uma função de x, fazemos:

$$y^2 + 2xy - \frac{2C}{x^2} = 0,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} y &= \frac{-2x \pm \sqrt{4x^2 + 8\frac{C}{x^2}}}{2} \\ &= -x \pm \sqrt{x^2 + 2\frac{C}{x^2}}. \end{aligned}$$

Podemos simplificar ainda mais tomando

$$k \equiv 2C.$$

Aí temos:

$$y = -x \pm \frac{1}{x}\sqrt{k + x^4}.$$