Equações diferenciais separáveis de primeira ordem

Temos a forma geral:

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0.$$

Por que é geral? Por exemplo, tomando

$$M(x,y) = q(x)\,y - f(x)$$

e

$$N(x,y) = p(x),$$

teremos:

$$[q(x)\,y - f(x)]\,dx + p(x)\,dy = 0,$$

isto é,

$$p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)\,y = f(x).$$

Quando acontecer que

$$M(x,y) = h(x)$$

e

$$N(x,y) = g(y),$$

teremos:

$$h(x)\,dx + g(y)\,dy = 0,$$

isto é,

$$g(y)\,dy = -h(x)\,dx,$$

que é fácil de resolver, em princípio, bastando apenas fazer a integração de ambos os membros:

$$\int g(y)\,dy = -\int h(x)\,dx.$$

Neste caso, dizemos que a equação diferencial é **separável**.

Vamos ver o Exemplo 2 do livro-texto de Boyce et al:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)}.$$

Podemos reescrever esta equação diferencial como:

$$-\left(3x^2+4x+2\right)dx + 2(y-1)\,dy = 0$$

e vemos que a equação é separável. A solução é obtida por integração:

$$2\int (y-1)\,dy = \int \left(3x^2+4x+2\right)dx,$$

isto é,

$$2\left(\frac{y^2}{2}-y+C_1\right) = x^3+2x^2+2x+C_2,$$

ou seja,

$$y^2-2y = x^3+2x^2+2x+C_2-2C_1,$$

ou ainda,

$$y^2-2y = x^3+2x^2+2x+C,$$

com

$$C \equiv C_2-2C_1$$

uma constante arbitrária.

Digressão: diferenciais

Suponha uma função de x, digamos, $f(x)$. A variação de $f(x)$, quando x varia de um incremento Δx (que pode ser positivo ou não), é denotado por $\Delta f = \Delta f(x)$ e definido como:

$$\Delta f(x) \equiv f(x+\Delta x) - f(x).$$

Por exemplo, quando

$$f(x) = x^2,$$

temos:

$$\begin{aligned} f(x+\Delta x) &= (x+\Delta x)^2 \\ &= x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x+\Delta x)-f(x) \\ &= x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-x^2 \\ &= 2x\Delta x+(\Delta x)^2. \end{aligned}$$

No caso em que $|\Delta x| \ll 1$, podemos aproximar:

$$\Delta f \approx 2x\Delta x.$$

Neste caso, a aproximação até a primeira ordem de Δx da variação de $f(x)$ é definida como a diferencial da função f e denotada, neste exemplo, como

$$df = 2x\Delta x.$$

Note que, neste exemplo, $2x$ é $f'(x)$. Assim, temos, em um caso geral,

$$df \equiv f'(x)\,\Delta x.$$

Veja que podemos pensar em x como sendo a função x, isto é, x é uma função de x, que se denotarmos por $g(x)$, então podemos escrevê-la assim:

$$g(x) = x.$$

Com isso, a diferencial de g, pela definição acima, fica:

$$dg \equiv g'(x)\,\Delta x.$$

Mas,

$$g'(x) = 1$$

e, assim,

$$dg = \Delta x.$$

Mas, $g = g(x) = x$ e, com isto, temos:

$$\begin{aligned} dg &= dx \\ &= \Delta x. \end{aligned}$$

Logo,

$$\Delta x = dx$$

e, portanto,

$$df = f'(x)\,dx.$$

Claramente, também, vemos que:

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x+\Delta x) - f(x) \\ &= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 \\ &= 2x\Delta x + (\Delta x)^2 \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)\\ &= 2x\\ &= f'(x).\end{aligned}$$

Vemos, portanto, facilmente, que, no caso geral, quando a função f é qualquer, que podemos sempre considerar que

$$\frac{df}{dx} = f'(x).$$

Note também que, em geral,

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\ &= f'(x),\end{aligned}$$

que é a definição de derivada.

Veja também que a diferencial dá uma aproximação para a curva $f(x+\Delta x)\equiv s_x(\Delta x)$ como função do incremento Δx :

$$\begin{aligned}f(x+\Delta x) &\approx f(x)+df\\ &= f(x)+f'(x)\Delta x,\end{aligned}$$

ou em termos da curva tangente ao ponto $(x, y=f(x))$,

$$s_x(\Delta x) \approx s_x(0)+m\Delta x,$$

onde $m\equiv f'(x)$ é o coeficiente angular da reta tangente.

Equações diferenciais exatas de primeira ordem

Note que uma função de duas variáveis, digamos $f(x,y)$, tem uma diferencial definida como:

$$df = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy.$$

Outra digressãozinha

De novo, tomamos um incremento no plano, isto é, tem um incremento Δx em x e outro, Δy, em y :

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)\\ &= f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)+f(x,y+\Delta y)-f(x,y)\\ &= \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)}{\Delta x}\Delta x+\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}\Delta y\\ &\approx \frac{\partial f(x,y+\Delta y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y\\ &\approx \frac{\partial f(x,y+\Delta y)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy\\ &\approx \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy,\end{aligned}$$

quando $|\Delta x| \ll 1$ e $|\Delta y| \ll 1$. E, de forma análoga ao que fizemos acima, para funções de uma só variável, neste caso definimos a diferencial para uma função de duas variáveis assim:

$$df \equiv \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy.$$

Retornando ao tópico, uma equação diferencial da forma:

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

é chamada de equação diferencial **exata** se a quantidade $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$ for uma diferencial de uma função das variáveis x e y, isto é, existe uma função $f = f(x,y)$ tal que sua diferencial é dada por:

$$df = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy.$$

Sendo assim, temos que

$$df = 0$$

e, portanto, segue imediatamente que

$$f(x,y) = C,$$

onde C é uma constante arbitrária. Tudo o que precisamos fazer, portanto, é achar $f(x,y)$.

A equação diferencial de primeira ordem

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

é chamada de equação diferencial **exata** se a quantidade $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$ for uma diferencial de uma função das variáveis x e y, isto é, existe uma função $f = f(x,y)$ tal que sua diferencial é dada por:

$$df = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy.$$

Sendo assim, temos que

$$df = 0$$

e, portanto, segue imediatamente que

$$f(x,y) = C,$$

onde C é uma constante arbitrária. Tudo o que precisamos fazer, portanto, é achar $f(x,y)$. Para isso, notemos que a diferencial de $f(x,y)$ é dada por

$$df = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$$

e, como também estamos supondo que

$$df = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy,$$

segue que devermos ter

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \tag{1}$$

e

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y), \tag{2}$$

supondo os incrementos dx e dy como sendo arbitrários e independentes, já que se $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$ é, de fato, por hipótese, a diferencial de um função, então dx e dy devem ser pensados como incrementos arbitrários e independentes. Um critério que nos permite ver se $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$ é uma diferencial exata ou não é notar que se $M(x,y)$ e $N(x,y)$ forem funções contínuas, então, para que as Eqs. (1) e (2) valham, sendo também contínuas, decorre que $\partial f(x,y)/\partial x$ e $\partial f(x,y)/\partial y$ também são contínuas. Logo, como essas derivadas parciais são contínuas, segue necessariamente que

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$$

e, portanto,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right],$$

isto é,

$$\frac{\partial}{\partial y} M(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} N(x,y). \tag{3}$$

Assim, é necessário que esta equação seja válida para que $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$ seja uma diferencial. Ou seja, ao fazermos o teste se a Eq. (3) vale e concluirmos que não vale, segue que $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$ não é uma diferencial e, portanto, a equação dada não é exata.

Por outro lado, caso a Eq. (3) valha, segue imediatamente que isto é suficiente para concluirmos que a equação dada é exata. Esta suficiência é verificada como segue. Considere um campo vetorial dado por

$$\mathbf{w}(x,y) \equiv \hat{\mathbf{x}} M(x,y) + \hat{\mathbf{y}} N(x,y).$$

O rotacional deste campo vetorial é dado por:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{w}(x,y) &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M(x,y) & N(x,y) & 0 \end{vmatrix} \\ &= \hat{\mathbf{x}}\left(\frac{\partial}{\partial y}0 - \frac{\partial N}{\partial z}\right) + \hat{\mathbf{y}}\left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}0\right) + \hat{\mathbf{z}}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \\ &= \hat{\mathbf{z}}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right). \end{aligned}$$

Mas, por hipótese, a Eq. (3) é válida e, portanto,

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{w}(x,y) = \mathbf{0}.$$

Sendo assim, como o rotacional é zero no plano xy, segue que existe uma função escalar, $\phi(x,y,z)$, como em eletrostática, tal que

$$\begin{aligned}\mathbf{w}(x,y) &= -\boldsymbol{\nabla}\phi(x,y,z) \\ &= -\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial\phi}{\partial x} - \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial\phi}{\partial y} - \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial\phi}{\partial z}.\end{aligned}$$

Pela definição de $\mathbf{w}(x,y)$, vemos que, então,

$$M(x,y) = -\frac{\partial\phi(x,y,z)}{\partial x},$$

$$N(x,y) = -\frac{\partial\phi(x,y,z)}{\partial y}$$

e

$$\frac{\partial\phi(x,y,z)}{\partial z} = 0.$$

A terceira desta equações mostra que $\phi(x,y,z)$ não depende da variável z e, portanto, é uma função só de x e y. Vamos denotar essa função por $-f(x,y)$ e aí concluímos, das equações acima, que, como consequência de que a Eq. (3) vale, segue a existência de uma função $f(x,y)$ tal que

$$M(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x},$$

$$N(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}.$$

Com isso, portanto, segue agora que a quantidade $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$ é uma diferencial exata, já que acabamos de demonstrar a existência de uma função tal que:

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy,$$

que, pela definição de diferencial, é equivalente a termos

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = df.$$

A equação diferencial dada é, dessa forma, equivalente a termos

$$df = 0,$$

ou seja, as soluções são tais que satisfazem

$$f(x,y) = C,$$

onde C é uma constante arbitrária. Basta resolver agora y como função de x ou x como função de y. O critério resumido na Eq. (3) é, portanto, necessário e suficiente para termos uma equação diferencial exata.