Fórmula de de Moivre

Já vimos que, para uma variável $\theta \in \mathbb{R}$,

$$[\exp(i\theta)]^n = \exp(in\theta),$$

com $n \in \mathbb{Z}$. A fórmula de de Moivre é exatamente esta que acabamos de escrever, expressa em termos de cosseno e seno:

$$(\cos\theta + i\mathrm{sen}\theta)^n = \cos(n\theta) + i\mathrm{sen}(n\theta).$$

O logaritmo de uma variável complexa

Considere $z \in \mathbb{C}$. Se quisermos encontrar todos os valores de $w \in \mathbb{C}$ tais que

$$\exp(w) = z,$$

teremos encontrado, por definição, os valores de $\ln z$. Para isso, vejamos um exemplo. Encontremos o $\ln(-1)$. Pela definição que acabamos de apresentar, devemos encontrar todos os valores $w \in \mathbb{C}$ tais que

$$\exp(w) = -1.$$

Seja

$$w = x + iy,$$

com $x, y \in \mathbb{R}$. Neste caso, queremos encontrar x, y tais que

$$\exp(x + iy) = -1,$$

isto é,

$$\exp(x)\exp(iy) = -1,$$

ou seja,

$$\exp(x)\cos(y) = -1$$

e

$$\exp(x)\,\mathrm{sen}(y) = 0$$

ao mesmo tempo. Como $\exp(x) \neq 0$, segue que

$$\mathrm{sen}(y) = 0.$$

Então,

$$y = n\pi,$$

com $n \in \mathbb{Z}$. Sabendo isso, vemos que

$$\exp(x)\cos(n\pi) = -1,$$

isto é,

$$\exp(x)(-1)^n = -1,$$

ou seja,

$$x = 0$$

e n deve ser ímpar. Logo,

$$\begin{aligned} \ln(-1) &= x + iy \\ &= i(2k+1)\pi \\ &= i\pi + i2\pi k, \end{aligned}$$

com $k \in \mathbb{Z}$. Veja que

$$-1 = \exp(i\pi),$$

de forma que o logaritmo que obtivemos é também escrito como

$$\ln[\exp(i\pi)] = i\pi + i2\pi k.$$

Então, em geral, podemos sempre escrever que

$$\ln[\exp(i\theta)] = i\theta + i2\pi k,$$

para $\theta \in \mathbb{R}$, com $k \in \mathbb{Z}$. Para qualquer variável complexa, $z \in \mathbb{C}$, portanto, primeiro escrevermos

$$z = |z|\exp(i\theta),$$

já que sempre podemos encontrar um tal $\theta \in \mathbb{R}$, e aí, de agora em diante, podemos também definir:

$$\begin{aligned} \ln(z) &\equiv \ln|z| + \ln[\exp(i\theta)] \\ &= \ln|z| + i\theta + i2\pi k, \end{aligned}$$

com $k \in \mathbb{Z}$. Não se esqueça de que, sempre,

$$|\exp(i\theta)| = 1,$$

para $\theta \in \mathbb{R}$.