Dado um número complexo

$$z = a + bi,$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$. O módulo do número $z \in \mathbb{C}$ é definido como:

$$|z| \equiv \sqrt{a^2 + b^2}$$

Dado um número complexo, $z \in \mathbb{C}$, definimos um outro número complexo, chamado de número complexo conjugado a $z$ assim:

$$z^* \equiv a - bi.$$

Em outras palavras, tudo o que você tem a fazer para obter o conjugado a um número complexo $z$, é trocar onde quer que $i$ apareça em $z$ por $-i$. Por exemplo, um número complexo complicado:

$$z_2 = \exp\left\{3\pi^{4+5i} \cos\left[\ln(39) + 70!\mathrm{sen}\left(5 + 4^{5i} i\right)\right]\right\}.$$

O número complexo conjugado a $z_2$ é, portanto,

$$z_2^* = \exp\left\{3\pi^{4-5i} \cos\left[\ln(39) + 70!\mathrm{sen}\left(5 - 4^{-5i} i\right)\right]\right\}.$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(z_2) &= \frac{z_2 + z_2^*}{2} \\
&= \frac{\exp\left\{3\pi^{4+5i} \cos\left[\ln(39) + 70!\mathrm{sen}\left(5 + 4^{5i} i\right)\right]\right\}}{2} \\
&\quad + \frac{\exp\left\{3\pi^{4-5i} \cos\left[\ln(39) + 70!\mathrm{sen}\left(5 - 4^{-5i} i\right)\right]\right\}}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(z_2) &= \frac{z_2 - z_2^*}{2i} \\
&= \frac{\exp\left\{3\pi^{4+5i} \cos\left[\ln(39) + 70!\mathrm{sen}\left(5 + 4^{5i} i\right)\right]\right\}}{2i} \\
&\quad - \frac{\exp\left\{3\pi^{4-5i} \cos\left[\ln(39) + 70!\mathrm{sen}\left(5 - 4^{-5i} i\right)\right]\right\}}{2i}
\end{aligned}$$

Se quisermos colocar um número complexo na forma

$$z = a + bi,$$

podemos, em alguns casos em que temos denominadores envolvendo números complexos, proceder assim, por exemplo:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{5+4i} &= \frac{2}{5+4i}\frac{5-4i}{5-4i} \\
&= \frac{10-8i}{(5+4i)(5-4i)}.
\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}(5+4i)(5-4i) &= 5(5-4i)+4i(5-4i)\\ &= 25-20i+20i-16i^2\\ &= 25+16\\ &= 41\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{2}{5+4i} &= \frac{2}{5+4i}\frac{5-4i}{5-4i}\\ &= \frac{10}{41}-\frac{8}{41}i.\end{aligned}$$

Prove isto:

$$z^*z = |z|^2$$

## Raízes de números complexos

Vamos começar com uma equação algébrica assim:

$$x^2 = 4.$$

Os valores possíveis de $x$ que satisfazem a esta equação são, obviamente, $-2$ e 2. Outro exemplo é esta equação:

$$x^3 = 8.$$

Neste caso, a solução real é 2. E, segundo o teorema fundamental da álgebra, há mais duas raízes complexas para esta equação. Quais são elas? Para ser uma experiência muito mais intuitiva o procedimento de extração de raízes complexas, é mais produtivo e eficiente se tivermos posse da fórmula de Euler para representação de números complexos.

### Fórmula de Euler

Vamos pensar em uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$. Por exemplo, sabemos que

$$f(x) \equiv \sqrt{x}.$$

Por exemplo, quando $x=-1$, $f(x)=\pm i$. Não é, portanto, uma função, pois não leva a uma única imagem. Mas podemos generalizar o conceito de função para o de uma função multi-valorada. Para o mesmo elemento do domínio, pode haver mais do que uma imagem. Outro exemplo é

$$g(x) \equiv 1+x^2 i.$$

Outro exemplo ainda é

$$h(x) \equiv x+ix^3+3-5i.$$

podemos, então, pensar nas derivadas dessas funções. Por exemplo:

$$\begin{aligned}\frac{dh(x)}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(x+ix^3+3-5i\right)\\ &= \frac{d}{dx}\left[(x+3)+i\left(x^3-5\right)\right]\\ &= \frac{d}{dx}(x+3)+\frac{d}{dx}\left[i\left(x^3-5\right)\right]\\ &= 1+i\frac{d}{dx}\left(x^3-5\right)\\ &= 1+i3x^2.\end{aligned}$$

O que nós vamos fazer agora é considerar a seguinte função desse tipo que acamos de exemplificar:

$$u(\theta) \equiv \cos\theta + i\mathrm{sen}\theta.$$

A derivada desta função fica:

$$\frac{du(\theta)}{d\theta} = -\mathrm{sen}\theta + i\cos\theta.$$

Como já vimos nos exemplos acima, podemos fatorar $i$ no segundo membro desta equação e assim obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{du(\theta)}{d\theta} &= i^2\mathrm{sen}\theta + i\cos\theta\\ &= i\left(\cos\theta + i\mathrm{sen}\theta\right)\\ &= iu(\theta).\end{aligned}$$

(Um verdadeiro "ah-ha moment"! Ou "insight".) Então, obtemos uma equação diferencial de primeira ordem:

$$\frac{du(\theta)}{d\theta} = iu(\theta).$$

Logo, a solução formal para $u(\theta)$ é

$$u(\theta) = A\exp(i\theta),$$

onde $A$ é uma constante arbitrária e, no presente contexto, uma constante complexa, em princípio. Notemos, no entanto, que quando $\theta = 0$, a definção de $u(\theta)$ acima nos dá:

$$\begin{aligned}u(0) &= \cos 0 + i\mathrm{sen}0\\ &= 1.\end{aligned}$$

Agora, pela solução da equação diferencial acima, obtemos

$$\begin{aligned}u(0) &= A\exp(i0)\\ &= A\exp(0)\\ &= A.\end{aligned}$$

Com este resultado e o fato de que, pela definição, $u(0) = 1$, segue que $A = 1$. E assim, obtemos a celebrada fórmula de Euler:

$$\exp(i\theta) = \cos\theta + i\text{sen}\theta.$$

Como é o complexo conjugado de $\exp(i\theta)$? Pelo que vimos acima, basta trocarmos $i$ por $-i$ :

$$\begin{aligned} [\exp(i\theta)]^* &= \exp(-i\theta) \\ &= (\cos\theta + i\text{sen}\theta)^* \\ &= \cos\theta - i\text{sen}\theta. \end{aligned}$$

Vemos, portanto, que

$$\begin{aligned} \exp(i\theta)\exp(-i\theta) &= (\cos\theta + i\text{sen}\theta)(\cos\theta - i\text{sen}\theta) \\ &= (\cos\theta + i\text{sen}\theta)\cos\theta \\ &\quad - (\cos\theta + i\text{sen}\theta)\, i\text{sen}\theta \\ &= \cos^2\theta + i\text{sen}\theta\cos\theta \\ &\quad - \left(\cos\theta i\text{sen}\theta + ii\text{sen}^2\theta\right) \\ &= \cos^2\theta + i\text{sen}\theta\cos\theta \\ &\quad -i\cos\theta\text{sen}\theta - ii\text{sen}^2\theta \\ &= \cos^2\theta + i\text{sen}\theta\cos\theta \\ &\quad -i\cos\theta\text{sen}\theta + \text{sen}^2\theta \\ &= \cos^2\theta + \text{sen}^2\theta \\ &= 1. \end{aligned}$$

Mas, então, como se fosse o caso real, porque

$$\exp(i\theta)\exp(-i\theta) = 1,$$

segue que

$$\exp(-i\theta) = \frac{1}{\exp(i\theta)}.$$

Ora, como seria, então, a exponencial de um número complexo qualquer,

$$z = a + bi,$$

com $a, b \in \mathbb{R}$, por exemplo?

$$\begin{aligned} \exp(z) &= \exp(a + bi) \\ &\equiv \exp(a)\exp(bi) \\ &= \exp(a)(\cos b + i\text{sen}b) \\ &= \exp(a)\cos b + i\exp(a)\text{sen}b. \end{aligned}$$

**Exercício:** Demonstre que, para $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, vale a seguinte igualdade:

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2).$$

Dica: use seno e cosseno da soma.

Uma consequência importante disso tudo que acabamos de ver é que sempre podemos escrever um número complexo qualquer como $\exp(\alpha + i\beta)$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Para vermos isso, consideremos um número complexo arbitrário não nulo:

$$z = a + bi,$$

com $a, b \in \mathbb{R}$. Sempre podemos escrever $z$ da seguinte forma:

$$z = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right).$$

Já sabemos que

$$\sqrt{a^2 + b^2} = |z|,$$

isto é, $\sqrt{a^2 + b^2}$ é o módulo de $z$. Então, para qualquer $z \neq 0$,

$$z = |z|\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right).$$

Notemos que

$$-1 \leqslant \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \leqslant 1$$

e

$$-1 \leqslant \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \leqslant 1.$$

É um bom exercício demonstrar isto! Então sempre existe um $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\cos\beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

e

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

já que

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1.$$

Portanto, sempre é possivel escrevermos

$$z = |z|(\cos\beta + i\operatorname{sen}\beta).$$

Mas, agora, podemos observar o seguinte:

$$\exp\left(\ln|z|\right) = |z|.$$

Então, podemos escolher

$$\alpha = \ln|z|$$

e, voilà:

$$\begin{aligned} z &= \exp\left(\ln|z|\right)\left(\cos\beta + i\mathrm{sen}\beta\right) \\ &= \exp\left(\alpha\right)\exp\left(i\beta\right) \\ &= \exp\left(\alpha + i\beta\right). \end{aligned}$$

Note que, neste exemplo, a função

$$f\left(z'\right) = \exp\left(z'\right)$$

é uma função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Neste particular exemplo, $z' = \alpha + i\beta$.

## Raízes de números complexos

Já fizemos um exercício que implica no seguinte resultado:

$$\exp\left(z' + z'\right) = \exp\left(z'\right)\exp\left(z'\right),$$

isto é,

$$\exp\left(2z'\right) = \left[\exp\left(z'\right)\right]^2,$$

ou seja,

$$\left[\exp\left(z'\right)\right]^2 = \exp\left(2z'\right).$$

Nós vimos acima que para

$$z = a + bi,$$

com $a, b \in \mathbb{R}$, sempre podemos escrever

$$z = \exp\left(z'\right),$$

com

$$z' = \alpha + i\beta,$$

onde $\alpha$ e $\beta$ são calculados como acima. Logo, a equação

$$\left[\exp\left(z'\right)\right]^2 = \exp\left(2z'\right)$$

pode ser escrita assim:

$$z^2 = \exp\left(2z'\right).$$