Polinômios de Laguerre e seus associados

Seguem alguns exercícios sobre a solução da equação radial para o átomo de hidrogênio segundo o método da equação de Schrödinger. Por favor, faça estes exercícios e aguarde, pois podem ser sorteados para entregar como parte da terceira avaliação. Um deles, a ser anunciado, deverá, com certeza, ser entregue como parte da lista da terceira avaliação.

Exercício Laguerre 1

Escreva a equação de Schrödinger independente do tempo para um elétron, cuja carga elétrica é $-e < 0$ e sua massa é μ, sob a ação do potencial de Coulomb gerado por um próton fixo na origem do sistema de coordenadas. Despreze o spin eletrônico. Seu resultado será a equação de Schrödinger independente do tempo para o átomo de hidrogênio.

Resolução:

Seja $\psi(r, \theta, \varphi)$ a função de onda do elétron. Então a equação de Schrödinger é dada por

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi(r,\theta,\varphi) - \frac{e^2}{r}\psi(r,\theta,\varphi) \quad = \quad E\psi(r,\theta,\varphi).$$

Note que estamos usando o sistema CGS de unidades e que a carga elétrica do próton deve ser igual e de sinal oposto à carga do elétron, isto é, o próton tem carga $e > 0$.

Exercício Laguerre 2

Separe o operador laplaciano em uma parte radial e outra parte angular. Aí, aproveitando que o sistema tem simetria esférica, expanda $\psi(r, \theta, \varphi)$ como uma superposição de funções harmônicas esféricas e escreva a equação radial que deverá ser satisfeita pelos coeficientes da espansão.

Resolução:

Como visto em aulas, temos:

$$\nabla^2 \quad = \quad \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{\mathbf{L}^2}{\hbar^2 r^2}.$$

Um elétron sob o potencial eletrostático de Coulomb produzido por um próton na origem forma um sistema que tem simetria esféria. Logo, podemos expandir a solução procurada em funções harmônicas esféricas sem que estas fiquem misturadas na equação resultante. Assim,

$$\psi(r,\theta,\varphi) \quad = \quad \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} R_\ell^m(r)\,Y_\ell^m(\theta,\varphi).$$

Aplicando o laplaciano a esta equação dá:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla^2}\psi(r,\theta,\varphi) \quad &= \quad \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\boldsymbol{\nabla^2}\left[R_\ell^m(r)\,Y_\ell^m(\theta,\varphi)\right] \\ &= \quad \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\left[\frac{Y_\ell^m(\theta,\varphi)}{r^{\mathbf{2}}}\frac{d}{dr}\left(r^{\mathbf{2}}\frac{dR_\ell^m(r)}{dr}\right) - R_\ell^m(r)\,\frac{\mathbf{L^2}Y_\ell^m(\theta,\varphi)}{\hbar^{\mathbf{2}}r^{\mathbf{2}}}\right].\end{aligned}$$

Mas nós sabemos que

$$\mathbf{L}^2 Y_\ell^m(\theta,\varphi) \quad = \quad \hbar^2 \ell(\ell+1) Y_\ell^m(\theta,\varphi).$$

Com isso, podemos reescrever a ação do operador laplaciano acima assim:

$$\nabla^2 \psi(r,\theta,\varphi) \quad = \quad \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_\ell^m(\theta,\varphi)\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_\ell^m(r)}{dr}\right)-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}R_\ell^m(r)\right].$$

Então, finalmente, a equação de Schrödinger escreve-se:

$$\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_\ell^m(\theta,\varphi)\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right)+\frac{\hbar^2\ell(\ell+1)}{2\mu r^2}-\frac{e^2}{r}-E\right]R_\ell^m(r) \quad = \quad 0.$$

Como dito acima, vemos aqui que, como o potencial de Coulomb tem simetria esférica, isto é, não depende nem de θ nem de φ, segue que a equação obtida não acopla uma função harmônica esférica com outra. Sendo assim, pela ortonormalidade dessas funções harmônicas esféricas, segue a hierarquia de equações:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_\ell^m(r)}{dr}\right)+\left[\frac{\hbar^2\ell(\ell+1)}{2\mu r^2}-\frac{e^2}{r}-E\right]R_\ell^m(r) \quad = \quad 0$$

ou ainda,

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_\ell^m(r)}{dr}\right)+\left[\frac{2\mu E}{\hbar^2}+\frac{2\mu e^2}{\hbar^2 r}-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right]R_\ell^m(r) \quad = \quad 0.$$

Exercício Laguerre 3

Use o modelo do átomo de Bohr para calcular o raio de Bohr, a_0, isto é, o raio da órbita cuja circunferência é exatamente igual ao comprimento de de Broglie para o módulo do momentum linear do elétron na órbita do estado fundamental do átomo de Bohr. Uma vez encontrado a_0, faça uma mudança de unidades de distância de forma que cada unidade de distância x passa a representar quantos raios de Bohr são compreendidos em cada valor de r, ou seja, faça a substituição de variável $r = xa_0$ na equação radial encontrada no exercício anterior.

Resolução:

Vamos mudar a unidade de distância e usar raios de Bohr. Como todo mundo sabe, o raio de Bohr é aquele que se obtém no estado fundamental do átomo de Bohr. A ideia é usar a relação de de Broglie junto com a aceleração centrípeta para o átomo circular do Bohr. Então, temos, em uma órbita circular de Bohr, com raio a_0, o comprimento de onda de de Broglie dá uma volta em torno da órbida e, portanto,

$$\lambda \quad = \quad 2\pi a_0 \tag{1}$$

e a força de Coulomb é equilibrada pela força centrípeta:

$$\mu\frac{v^2}{a_0} \quad = \quad \frac{e^2}{{a_0}^2},$$

isto é,

$$\mu v^{\mathbf{2}} = \frac{e^2}{a_0}. \tag{2}$$

Falta só conectar a onda à partícula, isto é, usar a relação de de Broglie:

$$p = \frac{h}{\lambda}. \tag{3}$$

Da Eq. (1) segue que

$$a_0 = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{h}{2\pi p} = \frac{\hbar}{p} = \frac{\hbar}{\mu v}, \tag{4}$$

onde usamos a Eq. (3) e as relações $\hbar = h/2\pi$ e $p = \mu v$. A Eq. (2) dá

$$\mu^{\mathbf{2}} v^{\mathbf{2}} = \frac{\mu e^2}{a_0}. \tag{5}$$

Das Eqs. (4) e (5) podemos escrever que

$$a_0{}^2 = \frac{\hbar^2 a_0}{\mu e^2}$$

e, portanto,

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{\mu e^2}.$$

Seja, portanto,

$$x \equiv \frac{r}{a_0}.$$

Com esta definição de x, a equação radial acima fica:

$$\frac{1}{a_0{}^{\mathbf{2}} x^{\mathbf{2}}} \frac{d}{dx}\left(x^{\mathbf{2}} \frac{dR_\ell^m(r)}{dx}\right) + \left[\frac{2\mu E}{\hbar^2} + \frac{2\mu e^{\mathbf{2}}}{\hbar^{\mathbf{2}} x a_0} - \frac{\ell(\ell+1)}{x^{\mathbf{2}} a_0{}^2}\right] R_\ell^m(r) = 0,$$

ou seja,

$$\frac{1}{x^{\mathbf{2}}} \frac{d}{dx}\left(x^{\mathbf{2}} \frac{dR_\ell^m(r)}{dx}\right) + \left[\frac{2\mu a_0{}^{\mathbf{2}} E}{\hbar^2} + \frac{2}{x} - \frac{\ell(\ell+1)}{x^{\mathbf{2}}}\right] R_\ell^m(r) = 0.$$

Veja que

$$\frac{2\mu a_0{}^{\mathbf{2}}}{\hbar^{\mathbf{2}}} = \frac{2\mu e^2 a_0{}^{\mathbf{2}}}{e^2 \hbar^{\mathbf{2}}} = \frac{2a_0}{e^{\mathbf{2}}}$$

e, com isso,

$$\frac{1}{x^{\mathbf{2}}} \frac{d}{dx}\left(x^{\mathbf{2}} \frac{dR_\ell^m(r)}{dx}\right) + \left[\frac{2a_0 E}{e^2} + \frac{2}{x} - \frac{\ell(\ell+1)}{x^{\mathbf{2}}}\right] R_\ell^m(r) = 0.$$

Exercício Laguerre 4

Substitua a função $R_\ell^m(r)$ na equação radial do exercício anterior usando $R_\ell^m(r) = u_\ell^m(x)/x$ e encontre a equação para $u_\ell^m(x)$. Isto é o que também fazemos se o caso for o de uma partícula livre.

Resolução:

Vamos definir:

$$u_\ell^m(x) \quad \equiv \quad xR_\ell^m(r)$$

e a equação radial agora fica:

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left[x^2\frac{d}{dx}\left(\frac{u_\ell^m(x)}{x}\right)\right] + \left[\frac{2a_0E}{e^2} + \frac{2}{x} - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\right]\frac{u_\ell^m(x)}{x} \quad = \quad 0,$$

isto é,

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[x^2\left(-\frac{u_\ell^m(x)}{x^2} + \frac{1}{x}\frac{du_\ell^m(x)}{dx}\right)\right] + \left[\frac{2a_0E}{e^2} + \frac{2}{x} - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\right]u_\ell^m(x) \quad = \quad 0,$$

ou seja,

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(-u_\ell^m(x) + x\frac{du_\ell^m(x)}{dx}\right) + \left[\frac{2a_0E}{e^2} + \frac{2}{x} - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\right]u_\ell^m(x) \quad = \quad 0,$$

ou ainda,

$$\frac{d^2u_\ell^m(x)}{dx^2} + \left[\frac{2a_0E}{e^2} + \frac{2}{x} - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\right]u_\ell^m(x) \quad = \quad 0.$$

Exercício Laguerre 5

Verifique que a solução regular na origem é a que vai a zero como $x^{\ell+1}$.

Resolução:

Quando $x \to 0$, o termo proporcional a $1/x^2$ é o dominante entre os colchetes e, portanto, nesse caso, a equação

$$\frac{d^2u_\ell^m(x)}{dx^2} + \left[\frac{2a_0E}{e^2} + \frac{2}{x} - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\right]u_\ell^m(x) \quad = \quad 0$$

fica, aproximadamente,

$$\frac{d^2u_\ell^m(x)}{dx^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}u_\ell^m(x) \quad \to \quad 0.$$

Vamos ver o que acontece se fizermos $u_\ell^m(x) \sim x^s$:

$$\frac{d^2u_\ell^m(x)}{dx^2} \quad \sim \quad \frac{d^2x^s}{dx^2} = s(s-1)x^{s-2}.$$

Então a equação acima dá:

$$s\,(s-1)\,x^{s-2} - \frac{\ell\,(\ell+1)}{x^2}x^s \quad \to \quad 0,$$

isto é,

$$s\,(s-1) \quad = \quad \ell\,(\ell+1)\,,$$

ou seja,

$$s \quad = \quad \ell+1$$

ou

$$s \quad = \quad -\ell.$$

Como o segundo caso implica uma solução irregular na origem, nós vemos que a regular é da forma $u_\ell^m\,(x) \to x^{\ell+1}$, como pedido no enunciado.

Exercício Laguerre 6

Quando $x \to \infty$, mostre que $u_\ell^m\,(x)$ tende a uma função exponencial para $E < 0$, já que estamos interessados nos estados em que o elétron fica ligado ao átomo, em um estado não ionizado. Encontre essa dependência exponencial, isto é, encontre $\alpha > 0$ tal que $u_\ell^m\,(x) \to \exp\,(-\alpha x)$ quando $x \to \infty$. Veja que pode ter a solução com exponencial positiva também, mas aí nós a descartamos como não física, pois a probabilidade de encontrar o elétron deve ser finita, por hipótese.

Resolução:

Quando $x \to \infty$, segue que a equação para $u_\ell^m\,(x)$ fica assim:

$$\frac{d^2 u_\ell^m\,(x)}{dx^2} + \frac{2a_0 E}{e^2}u_\ell^m\,(x) \quad \to \quad 0$$

e, portanto,

$$u_\ell^m\,(x) \quad \to \quad \exp\,(-\alpha x)\,,$$

com

$$\alpha \quad = \quad \sqrt{-\frac{2a_0 E}{e^2}}.$$

Exercício Laguerre 7

Mude mais uma vez de variável, agora escrevendo a equação diferencial para a função

$$v_\ell^m\,(x) \quad \equiv \quad \exp\,(\alpha x)\,u_\ell^m\,(x)\,.$$

Resolução:

Vamos calcular as derivadas:

$$\frac{du_\ell^m(x)}{dx} = -\alpha u_\ell^m(x) + \exp(-\alpha x)\frac{dv_\ell^m(x)}{dx}$$

e

$$\frac{d^2u_\ell^m(x)}{dx^2} = -\alpha\frac{du_\ell^m(x)}{dx} - \alpha\exp(-\alpha x)\frac{dv_\ell^m(x)}{dx} + \exp(-\alpha x)\frac{d^2v_\ell^m(x)}{dx^2},$$

isto é,

$$\frac{d^2u_\ell^m(x)}{dx^2} = \alpha^2 u_\ell^m(x) - 2\alpha\exp(-\alpha x)\frac{dv_\ell^m(x)}{dx} + \exp(-\alpha x)\frac{d^2v_\ell^m(x)}{dx^2},$$

ou seja,

$$\exp(\alpha x)\frac{d^2u_\ell^m(x)}{dx^2} = \alpha^2 v_\ell^m(x) - 2\alpha\frac{dv_\ell^m(x)}{dx} + \frac{d^2v_\ell^m(x)}{dx^2},$$

Note que a equação radial que temos para $u_\ell^m(x)$ também pode ser escrita assim:

$$\exp(\alpha x)\frac{d^2u_\ell^m(x)}{dx^2} + \left[-\alpha^2 + \frac{2}{x} - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\right]v_\ell^m(x) = 0,$$

onde usamos que

$$\alpha = \sqrt{-\frac{2a_0E}{e^2}}.$$

Então, com nossos cálculos das derivadas que fizemos acima, segue que a equação para $v_\ell^m(x)$ fica:

$$-2\alpha\frac{dv_\ell^m(x)}{dx} + \frac{d^2v_\ell^m(x)}{dx^2} + \frac{2}{x}v_\ell^m(x) - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}v_\ell^m(x) = 0,$$

isto é,

$$\frac{d^2v_\ell^m(x)}{dx^2} - 2\alpha\frac{dv_\ell^m(x)}{dx} + \left[\frac{2}{x} - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\right]v_\ell^m(x) = 0.$$

Exercício Laguerre 8

Agora que já sabemos que a solução próxima à origem é da forma $x^{\ell+1}$, proponha um ansatz para a solução da equação para $v_\ell^m(x)$ em forma de série assim:

$$v_\ell^m(x) = x^{\ell+1}\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k$$

e encontre a fórmula de recorrência para os coeficientes c_k.

Resolução:

Temos as derivadas:

$$\frac{dv_\ell^m(x)}{dx} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+\ell+1) x^{k+\ell}$$

e

$$\frac{d^2 v_\ell^m(x)}{dx^2} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+\ell+1)(k+\ell) x^{k+\ell-1}.$$

Assim, a equação para $v_\ell^m(x)$ fica:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \left[(k+\ell+1)(k+\ell) - \ell(\ell+1)\right] x^{k+\ell-1} - 2\alpha \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(k+\ell+1-\frac{1}{\alpha}\right) x^{k+\ell} = 0.$$

Com isso temos que ter

$$c_0 \left[(\ell+1)\ell - \ell(\ell+1)\right] = 0$$

e que, portanto, dá $c_0 \neq 0$ como uma possível solução. Aí ficamos com

$$c_{k+1} \left[(k+\ell+2)(k+\ell+1) - \ell(\ell+1)\right] = 2\alpha c_k \left(k+\ell+1-\frac{1}{\alpha}\right),$$

isto é,

$$\frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{2(\alpha k + \alpha\ell + \alpha - 1)}{(k+\ell+2)(k+\ell+1) - \ell(\ell+1)}.$$

Exercício Laguerre 9

Verifique que a série encontrada diverge a menos que α seja $\alpha = 1/(p+\ell+1)$ para algum número inteiro $p \geqslant 0$.

Resolução:

Se olharmos o quociente c_{k+1}/c_k quando k é muito grande, teremos:

$$\frac{c_{k+1}}{c_k} \sim \frac{2\alpha}{k}.$$

Este é o comportamento de uma exponencial do tipo $\exp(2\alpha x)$, pois, nesse caso,

$$\exp(2\alpha x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$

com

$$c_k = \frac{(2\alpha)^k}{k!}$$

e, portanto,

$$\frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{(2\alpha)^{k+1}}{(k+1)!}\frac{k!}{(2\alpha)^k} = \frac{2\alpha}{k+1} \sim \frac{2\alpha}{k}$$

para k muito grande. Então, como vemos que a série diverge, é melhor escolhermos α tal que quando $k = p$ para algum $p \geqslant 0$ inteiro a série se anule, isto é,

$$2\left(\alpha p + \alpha\ell + \alpha - 1\right) = 0,$$

ou seja,

$$\alpha = \frac{1}{p + \ell + 1},$$

como pedido no enunciado.

Exercício Laguerre 10

Verifique a quantização da energia do átomo de hidrogênio fazendo $n \equiv p + \ell + 1$, com $p = 0, 1, 2, \ldots$ e note que, para um dado valor de n, os possíveis valores de ℓ não podem ultrapassar $n - 1$.

Resolução:

Fazendo $n \equiv p + \ell + 1$, vemos que, para um número fixo n, temos que $\ell = n - 1 - p$. Conforme vamos aumentando p a partir de $p = 0$, ℓ tem que diminuir. Como o menor valor de p é zero, concluímos que o maior valor de ℓ só pode ser $n - 1$. Agora vejamos a relação:

$$\alpha = \frac{1}{n}.$$

Como já vimos no exercício 7, esta equação significa que

$$\sqrt{-\frac{2a_0E}{e^2}} = \frac{1}{n},$$

isto é,

$$-\frac{2a_0E}{e^2} = \frac{1}{n^2},$$

ou seja,

$$E = -\frac{e^2}{2a_0n^2},$$

que são as energias discretas do átomo de hidrogênio. A unidade de energia medida em $e^2/2a_0$ é chamada de rydberg e vale, aproximadamente, 13.6 eV, sendo, também, a energia de ionização do estado fundamental do átomo de hidrogênio.

Exercício Laguerre 11

Verifique que a solução que temos para $R_\ell^m(r)$ é, a menos de uma constante de proporcionalidade,

$$R_\ell(r) \quad \propto \quad \exp(-\alpha x)\, x^\ell L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}\left(\frac{2}{n}x\right).$$

onde $L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}(x)$ são os polinômios associados de Laguerre.

Resolução:

Primeiro vejamos como os livros-texto definem os polinômios associados de Laguerre. Na sexta edição do livro-texto de Arfken e Weber, na página 842, vemos a Eq. (13.77), que dá a equação para os polinômios associados de Laguerre. A equação é escrita como

$$x\frac{d^2L_n^k(x)}{dx^2} + (k+1-x)\frac{dL_n^k(x)}{dx} + nL_n^k(x) \quad = \quad 0.$$

Por razões que vão ficar claras mais no final, vamos reescrever essa equação usando outro símbolo para a variável independente. Fazemos $x \to y$ na equação acima e obtemos

$$y\frac{d^2L_n^k(y)}{dy^2} + (k+1-y)\frac{dL_n^k(y)}{dy} + nL_n^k(y) \quad = \quad 0.$$

No Exercício 11 acima, queremos a equação para $L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}(y)$, que fazendo, na equação acima, as substituições $k \to 2\ell+1$ e $n \to n-\ell-1$, obtemos

$$y\frac{d^2L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}(y)}{dy^2} + (2\ell+2-y)\frac{dL_{n-\ell-1}^{2\ell+1}(y)}{dy} + (n-\ell-1)L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}(y) \quad = \quad 0.$$

No Exercício 7 acima, vimos que nossa equação diferencial ficou

$$\frac{d^2v_\ell^m(x)}{dx^2} - 2\alpha\frac{dv_\ell^m(x)}{dx} + \left[\frac{2}{x} - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\right]v_\ell^m(x) \quad = \quad 0.$$

Já no Exercício 9 acima, vimos que para a função de onda não divergir quando $x \to \infty$, devemos escolher α tal que quando $k = p$ para algum $p \geqslant 0$ inteiro a série se anule, isto é,

$$2(\alpha p + \alpha\ell + \alpha - 1) \quad = \quad 0,$$

ou seja,

$$\alpha \quad = \quad \frac{1}{p+\ell+1}.$$

Antes de mais nada, observemos que a equação radial não depende de m e que, portanto, estamos com um sobrescrito m espúrio em $R_\ell^m(r)$ e também em $v_\ell^m(x)$. Sendo assim, vamos eliminar esse sobrescrito inútil e escrever a equação acima como

$$\frac{d^2v_\ell(x)}{dx^2} - 2\alpha\frac{dv_\ell(x)}{dx} + \left[\frac{2}{x} - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\right]v_\ell(x) \quad = \quad 0.$$

No Excercício 10 acima, escrevemos

$$\alpha = \frac{1}{n}$$

e, assim, como também temos

$$\alpha = \frac{1}{p+\ell+1},$$

segue que

$$p = n-\ell-1.$$

Nossa equação agora fica

$$\frac{d^2 v_\ell(x)}{dx^2} - \frac{2}{n}\frac{dv_\ell(x)}{dx} + \left[\frac{2}{x} - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\right] v_\ell(x) = 0.$$

No Exercício 8 acima, usamos o ansatz

$$v_\ell(x) = x^{\ell+1}\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$

já eliminando m, e vimos que quando escolhemos

$$\alpha = \frac{1}{p+\ell+1},$$

a série para e ficamos, portanto, com

$$v_\ell(x) = x^{\ell+1}\sum_{k=0}^{p} c_k x^k,$$

pois agora $c_{k+1} = c_{p+1} = 0$. Seja

$$w_p(x) \equiv \sum_{k=0}^{p} c_k x^k.$$

Com isso, escrevemos

$$v_\ell(x) = x^{\ell+1} w_\ell^p(x)$$

e agora a equação acima dá

$$\frac{d^2 x^{\ell+1} w_\ell^p(x)}{dx^2} - \frac{2}{n}\frac{dx^{\ell+1} w_\ell^p(x)}{dx} + \left[\frac{2}{x} - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\right] x^{\ell+1} w_\ell^p(x) = 0.$$

Mas,

$$\frac{dx^{\ell+1} w_\ell^p(x)}{dx} = (\ell+1)\, x^\ell w_\ell^p(x) + x^{\ell+1}\frac{dw_\ell^p(x)}{dx}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 x^{\ell+1} w_\ell^p(x)}{dx^2} &= (\ell+1)\frac{dx^\ell w_\ell^p(x)}{dx} + \frac{d}{dx}\left[x^{\ell+1}\frac{dw_\ell^p(x)}{dx}\right] \\
&= (\ell+1)\,\ell x^{\ell-1} w_\ell^p(x) + 2(\ell+1)\,x^\ell \frac{dw_\ell^p(x)}{dx} \\
&\quad + x^{\ell+1}\frac{d^2 w_\ell^p(x)}{dx^2}.
\end{aligned}$$

Logo, a equação diferencial satisfeita por $w_\ell^p(x)$ agora fica

$$\begin{aligned}
(\ell+1)\,\ell x^{\ell-1} w_\ell^p(x) + 2(\ell+1)\,x^\ell \frac{dw_\ell^p(x)}{dx} + x^{\ell+1}\frac{d^2 w_\ell^p(x)}{dx^2} & \\
-\frac{2}{n}\left[(\ell+1)\,x^\ell w_\ell^p(x) + x^{\ell+1}\frac{dw_\ell^p(x)}{dx}\right] + \left[\frac{2}{x} - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\right]x^{\ell+1} w_\ell^p(x) &= 0,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
2(\ell+1)\,x^\ell \frac{dw_\ell^p(x)}{dx} + x^{\ell+1}\frac{d^2 w_\ell^p(x)}{dx^2} & \\
-\frac{2}{n}(\ell+1)\,x^\ell w_\ell^p(x) - \frac{2}{n}x^{\ell+1}\frac{dw_\ell^p(x)}{dx} + 2x^\ell w_\ell^p(x) &= 0,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
2(\ell+1)\frac{dw_\ell^p(x)}{dx} + x\frac{d^2 w_\ell^p(x)}{dx^2} & \\
-\frac{2}{n}(\ell+1)\,w_\ell^p(x) - \frac{2}{n}x\frac{dw_\ell^p(x)}{dx} + 2w_\ell^p(x) &= 0,
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$x\frac{d^2 w_\ell^p(x)}{dx^2} + \left[2(\ell+1) - \frac{2}{n}x\right]\frac{dw_\ell^p(x)}{dx} + \left[2 - \frac{2}{n}(\ell+1)\right]w_\ell^p(x) = 0.$$

Queremos fazer essa equação ficar, como vimos, a mesma que esta:

$$y\frac{d^2 L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}(y)}{dy^2} + (2\ell+2-y)\frac{dL_{n-\ell-1}^{2\ell+1}(y)}{dy} + (n-\ell-1)\,L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}(y) = 0.$$

Não é possível fazer isso se insistirmos em manter a variável independente como sendo x. Temos que mudar a variável. O segundo termo, proporcional à primeira derivada, quando comparado com a equação para $L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}(y)$ dá a dica de que devemos ter

$$y \equiv \frac{2}{n}x.$$

Logo,

$$\frac{n}{2}y\frac{d^2 w_\ell^p(x)}{dx^2} + [2(\ell+1) - y]\frac{dw_\ell^p(x)}{dx} + \left[2 - \frac{2}{n}(\ell+1)\right]w_\ell^p(x) = 0.$$

Mas,

$$\begin{aligned}\frac{dw_\ell^p(x)}{dx} &= \frac{dy}{dx}\frac{dw_\ell^p\left(\frac{n}{2}y\right)}{dy}\\ &= \frac{2}{n}\frac{dw_\ell^p\left(\frac{n}{2}y\right)}{dy}\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\frac{d^2w_\ell^p(x)}{dx^2} &= \frac{dy}{dx}\frac{d}{dy}\left[\frac{dw_\ell^p(x)}{dx}\right]\\ &= \frac{dy}{dx}\frac{d}{dy}\left[\frac{2}{n}\frac{dw_\ell^p\left(\frac{n}{2}y\right)}{dy}\right]\\ &= \left(\frac{2}{n}\right)^2\frac{d^2w_\ell^p\left(\frac{n}{2}y\right)}{dy^2}.\end{aligned}$$

Então,

$$\frac{n}{2}y\left(\frac{2}{n}\right)^2\frac{d^2w_\ell^p\left(\frac{n}{2}y\right)}{dy^2} + \left[2(\ell+1)-y\right]\frac{2}{n}\frac{dw_\ell^p\left(\frac{n}{2}y\right)}{dy} + \left[2-\frac{2}{n}(\ell+1)\right]w_\ell^p\left(\frac{n}{2}y\right) = 0,$$

isto é,

$$\frac{2}{n}y\frac{d^2w_\ell^p\left(\frac{n}{2}y\right)}{dy^2} + \left[2(\ell+1)-y\right]\frac{2}{n}\frac{dw_\ell^p\left(\frac{n}{2}y\right)}{dy} + \left[2-\frac{2}{n}(\ell+1)\right]w_\ell^p\left(\frac{n}{2}y\right) = 0,$$

ou seja,

$$y\frac{d^2w_\ell^p\left(\frac{n}{2}y\right)}{dy^2} + (2\ell+2-y)\frac{dw_\ell^p\left(\frac{n}{2}y\right)}{dy} + (n-\ell-1)\,w_\ell^p\left(\frac{n}{2}y\right) = 0.$$

Comparando com

$$y\frac{d^2L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}(y)}{dy^2} + (2\ell+2-y)\frac{dL_{n-\ell-1}^{2\ell+1}(y)}{dy} + (n-\ell-1)\,L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}(y) = 0,$$

vemos que

$$w_\ell^p\left(\frac{n}{2}y\right) = L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}(y).$$

Logo,

$$w_\ell^p(x) = L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}\left(\frac{2}{n}x\right).$$

Então,

$$\begin{aligned}v_\ell(x) &= x^{\ell+1}w_\ell^p(x)\\ &= x^{\ell+1}L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}\left(\frac{2}{n}x\right).\end{aligned}$$

Do Exercício 7 acima vem que

$$v_\ell^m(x) \equiv \exp(\alpha x)\, u_\ell^m(x)$$

e, portanto,

$$u_\ell(x) = \exp(-\alpha x)\, x^{\ell+1} L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}\left(\frac{2}{n}x\right),$$

já eliminando o sobrescrito espúrio m. Além disso, do Exercício 4 acima temos que

$$u_\ell^m(x) \equiv x R_\ell^m(r)$$

e, então,

$$R_\ell(r) = \exp(-\alpha x)\, x^{\ell} L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}\left(\frac{2}{n}x\right),$$

também já eliminando o sobrescrito espúrio m. Essa resposta deve ser ainda multiplicada por $Y_\ell^m(\theta,\varphi)$ e normalizada, para termos as funções de onda do átomo de hidrogênio. Por causa disso, ao invés do sinal de igualdade, apenas dizemos que $R_\ell(r)$ é proporcional ao que obtemos no membro direito acima. Então, escrevemos

$$R_\ell(r) \propto \exp(-\alpha x)\, x^{\ell} L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}\left(\frac{2}{n}x\right).$$

Notemos que nosso x é dado por

$$x \equiv \frac{r}{a_0},$$

com

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{\mu e^2}.$$

do Exercício 3 acima. Do Exercício 10 acima,

$$E_n = -\frac{e^2}{2a_0 n^2},$$

já incluindo o subscrito n, de forma que também podemos escrever que

$$\begin{aligned}
\frac{2}{n}x &= \frac{2r}{na_0} \\
&= r\sqrt{\frac{4}{n^2 a_0^2}} \\
&= r\sqrt{-\frac{8a_0 E}{a_0^2 e^2}} \\
&= r\sqrt{-\frac{8E_n}{a_0 e^2}} \\
&= r\sqrt{-\frac{8\mu e^{\mathbf{2}} E_n}{\hbar^{\mathbf{2}} e^2}} \\
&= r\sqrt{-\frac{8\mu E_n}{\hbar^{\mathbf{2}}}} \\
&= \kappa r,
\end{aligned}$$

onde definimos

$$\kappa \equiv \sqrt{-\frac{8\mu E_n}{\hbar^2}},$$

como no link Laguerre polynomials and the hydrogen wave function, página 6.