Polinômios de Legendre

Para físicos, a melhor forma de introduzir polinômios de Legendre é ver que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{|\mathbf{r}_> - \mathbf{r}_<|} &= \frac{1}{\sqrt{r_>^2 + r_<^2 - 2\mathbf{r}_> \cdot \mathbf{r}_<}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{r_>^2 + r_<^2 - 2r_> r_< \cos\theta}} \\
&= \frac{1}{r_> \sqrt{1 + \frac{r_<^2}{r_>^2} - 2\frac{r_<}{r_>}\cos\theta}}
\end{aligned}
$$

onde $r_> > r_<$ e θ é o ângulo entre $\mathbf{r}_>$ e $\mathbf{r}_<$. Então, como

$$\frac{r_<}{r_>} < 1,$$

segue que podemos escrever:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r_<^2}{r_>^2} - 2\frac{r_<}{r_>}\cos\theta}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(\cos\theta)\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^\ell,$$

onde os coeficientes, que vão ter que depender de $\cos\theta$, são chamados de polinômios de Legendre. Com isso, podemos escrever:

$$\frac{1}{|\mathbf{r}_> - \mathbf{r}_<|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(\cos\theta)\frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}}.$$

1 **Exercício**: calcule $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ e $P_3(x)$.

2 **Exercício**: mostre que

$$\left(1 - 2xt + t^2\right)^{-1/2} = \sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(x)\, t^\ell.$$

A função $\left(1 - 2xt + t^2\right)^{-1/2}$ é a chamada função geratriz dos polinômios de Legendre.

3 **Exercício**: faça uma pesquisa no livro do Arfken para encontrar como você pode deduzir a fórmula geral da série dos polinômios de Legendre,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{[\![n/2]\!]} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k!\,(n-k)!\,(n-2k)!} x^{n-2k},$$

a partir da função geratriz.

4 **Exercício**: mostre que

$$P_\ell(-x) = (-1)^\ell P_\ell(x).$$

5 **Exercício**: mostre que os polinômios de Legendre satisfazem a equação de Legendre:

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2P_n\left(x\right)}{dx^2}-2x\frac{dP_n\left(x\right)}{dx}+n\left(n+1\right)P_n\left(x\right) = 0.$$

Dê uma olhada, por exemplo, no livro do Arfken.

6 **Exercício**: mostre que

$$P_n\left(1\right) = 1.$$

Funções de Legendre associadas

Considere as funções

$$P_\ell^m\left(x\right) \equiv \left(1-x^2\right)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_\ell\left(x\right),$$

com $m\geqslant 0$, isto é, $m=0,1,2,3,\ldots$ Qual equação diferencial de segunda ordem as funções $P_\ell^m\left(x\right)$ satisfazem? Usando o resultado do exercício 5 acima, isto é,

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2P_\ell\left(x\right)}{dx^2}-2x\frac{dP_\ell\left(x\right)}{dx}+\ell\left(\ell+1\right)P_\ell\left(x\right) = 0,$$

podemos tomar m derivadas com relação a x dessa equação para obter:

$$\frac{d^m}{dx^m}\left[\left(1-x^2\right)\frac{d^2P_\ell\left(x\right)}{dx^2}\right]-2\frac{d^m}{dx^m}\left[x\frac{dP_\ell\left(x\right)}{dx}\right]+\ell\left(\ell+1\right)\frac{d^m}{dx^m}P_\ell\left(x\right) = 0.$$

Da fórmula de Leibnitz, segue que

$$\frac{d^m}{dx^m}\left[f\left(x\right)g\left(x\right)\right] = \sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!\left(m-k\right)!}\left[\frac{d^{m-k}}{dx^{m-k}}f\left(x\right)\right]\frac{d^k}{dx^k}g\left(x\right)$$

vale para funções $f\left(x\right)$ e $g\left(x\right)$ que tenham derivadas até a ordem m. Logo,

$$\begin{aligned}\frac{d^m}{dx^m}\left[\left(1-x^2\right)\frac{d^2P_\ell\left(x\right)}{dx^2}\right] &= \frac{d^m}{dx^m}\left[\frac{d^2P_\ell\left(x\right)}{dx^2}\left(1-x^2\right)\right]\\ &= \sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!\left(m-k\right)!}\left[\frac{d^{m-k}}{dx^{m-k}}\frac{d^2P_\ell\left(x\right)}{dx^2}\right]\frac{d^k}{dx^k}\left(1-x^2\right)\\ &= \left(1-x^2\right)\frac{d^m}{dx^m}\frac{d^2P_\ell\left(x\right)}{dx^2}\\ &\quad +m\left[\frac{d^m}{dx^m}\frac{dP_\ell\left(x\right)}{dx}\right]\left(-2x\right)\\ &\quad +\frac{m!}{2!\left(m-2\right)!}\left[\frac{d^m}{dx^m}P_\ell\left(x\right)\right]\left(-2\right),\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}\frac{d^m}{dx^m}\left[\left(1-x^2\right)\frac{d^2P_\ell(x)}{dx^2}\right] &= \left(1-x^2\right)\frac{d^m}{dx^m}\frac{d^2P_\ell(x)}{dx^2} \\ &\quad -2mx\left[\frac{d^m}{dx^m}\frac{dP_\ell(x)}{dx}\right] \\ &\quad -m(m-1)\frac{d^m}{dx^m}P_\ell(x).\end{aligned}$$

Também,

$$\begin{aligned}\frac{d^m}{dx^m}\left[x\frac{dP_\ell(x)}{dx}\right] &= \frac{d^m}{dx^m}\left[\frac{dP_\ell(x)}{dx}x\right] \\ &= \sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!\,(m-k)!}\left[\frac{d^{m-k}}{dx^{m-k}}\frac{dP_\ell(x)}{dx}\right]\frac{d^k}{dx^k}x \\ &= x\frac{d^m}{dx^m}\frac{dP_\ell(x)}{dx} \\ &\quad +m\frac{d^m}{dx^m}P_\ell(x).\end{aligned}$$

Com esses resultados, a equação

$$\frac{d^m}{dx^m}\left[\left(1-x^2\right)\frac{d^2P_\ell(x)}{dx^2}\right]-2\frac{d^m}{dx^m}\left[x\frac{dP_\ell(x)}{dx}\right]+\ell(\ell+1)\frac{d^m}{dx^m}P_\ell(x) = 0$$

agora fica:

$$\begin{aligned}\left(1-x^2\right)\frac{d^m}{dx^m}\frac{d^2P_\ell(x)}{dx^2}-2mx\frac{d^m}{dx^m}\frac{dP_\ell(x)}{dx}-m(m-1)\frac{d^m}{dx^m}P_\ell(x)& \\ -2x\frac{d^m}{dx^m}\frac{dP_\ell(x)}{dx}-2m\frac{d^m}{dx^m}P_\ell(x)& \\ +\ell(\ell+1)\frac{d^m}{dx^m}P_\ell(x) &= 0,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\left(1-x^2\right)\frac{d^2}{dx^2}\frac{d^mP_\ell(x)}{dx^m}-2(m+1)\,x\frac{d}{dx}\frac{d^mP_\ell(x)}{dx^m}& \\ +\left[\ell(\ell+1)-m(m-1)-2m\right]\frac{d^m}{dx^m}P_\ell(x) &= 0,\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}\left(1-x^2\right)\frac{d^2}{dx^2}\frac{d^mP_\ell(x)}{dx^m}-2(m+1)\,x\frac{d}{dx}\frac{d^mP_\ell(x)}{dx^m}& \\ +\left[\ell(\ell+1)-m(m+1)\right]\frac{d^m}{dx^m}P_\ell(x) &= 0.\end{aligned}$$

Podemos agora reescrever a definição lá em cima assim:

$$\frac{d^m}{dx^m}P_\ell(x) = \frac{P_\ell^m(x)}{(1-x^2)^{m/2}}.$$

Com isso, a equação logo anterior, que acabamos de deduzir, fica:

$$\begin{aligned}\left(1-x^2\right)\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{P_\ell^m(x)}{(1-x^2)^{m/2}}\right]-2(m+1)\,x\frac{d}{dx}\left[\frac{P_\ell^m(x)}{(1-x^2)^{m/2}}\right]&\\ +\left[\ell(\ell+1)-m(m+1)\right]\frac{P_\ell^m(x)}{(1-x^2)^{m/2}} &= 0.\end{aligned}$$

Mas,

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{P_\ell^m(x)}{(1-x^2)^{m/2}}\right] = \frac{1}{(1-x^2)^{m/2}}\frac{d}{dx}P_\ell^m(x)+\frac{mx}{(1-x^2)^{m/2+1}}P_\ell^m(x)$$

e, então,

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{P_\ell^m(x)}{(1-x^2)^{m/2}}\right] &= \frac{1}{(1-x^2)^{m/2}}\frac{d^2}{dx^2}P_\ell^m(x)\\ &\quad+\frac{2mx}{(1-x^2)^{m/2+1}}\frac{d}{dx}P_\ell^m(x)\\ &\quad+P_\ell^m(x)\frac{d}{dx}\left[\frac{mx}{(1-x^2)^{m/2+1}}\right].\end{aligned}$$

Usando

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[\frac{mx}{(1-x^2)^{m/2+1}}\right] &= \frac{m}{(1-x^2)^{m/2+1}}+\frac{m(m+2)\,x^2}{(1-x^2)^{m/2+2}}\\ &= \frac{m\left(1-x^2\right)+m(m+2)\,x^2}{(1-x^2)^{m/2+2}}\\ &= m\frac{1-x^2+mx^2+2x^2}{(1-x^2)^{m/2+2}}\\ &= m\frac{1+(m+1)\,x^2}{(1-x^2)^{m/2+2}}\\ &= \frac{m+m(m+1)\,x^2}{(1-x^2)^{m/2+2}},\end{aligned}$$

obtemos

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{P_\ell^m(x)}{(1-x^2)^{m/2}}\right] = \frac{1}{(1-x^2)^{m/2}}\frac{d^2}{dx^2}P_\ell^m(x)$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{2mx}{\left(1-x^2\right)^{m/2+1}}\frac{d}{dx}P_\ell^m\left(x\right)\\
&+P_\ell^m\left(x\right)\frac{m+m\left(m+1\right)x^2}{\left(1-x^2\right)^{m/2+2}}.
\end{aligned}
$$

Usando esses resultados para as derivadas, nossa equação para as funções $P_\ell^m\left(x\right)$ agora fica:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\left(1-x^2\right)^{m/2-1}}\frac{d^2}{dx^2}P_\ell^m\left(x\right)+\frac{2mx}{\left(1-x^2\right)^{m/2}}\frac{d}{dx}P_\ell^m\left(x\right)+P_\ell^m\left(x\right)\frac{m+m\left(m+1\right)x^2}{\left(1-x^2\right)^{m/2+1}}&\\
-\frac{2\left(m+1\right)x}{\left(1-x^2\right)^{m/2}}\frac{d}{dx}P_\ell^m\left(x\right)-\frac{2m\left(m+1\right)x^2}{\left(1-x^2\right)^{m/2+1}}P_\ell^m\left(x\right)&\\
+\left[\ell\left(\ell+1\right)-m\left(m+1\right)\right]\frac{P_\ell^m\left(x\right)}{\left(1-x^2\right)^{m/2}}&=0,
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
\begin{aligned}
\left(1-x^2\right)\frac{d^2}{dx^2}P_\ell^m\left(x\right)+2mx\frac{d}{dx}P_\ell^m\left(x\right)+\frac{m+m\left(m+1\right)x^2}{\left(1-x^2\right)}P_\ell^m\left(x\right)&\\
-2\left(m+1\right)x\frac{d}{dx}P_\ell^m\left(x\right)-\frac{2m\left(m+1\right)x^2}{\left(1-x^2\right)}P_\ell^m\left(x\right)&\\
+\left[\ell\left(\ell+1\right)-m\left(m+1\right)\right]P_\ell^m\left(x\right)&=0,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
\left(1-x^2\right)\frac{d^2}{dx^2}P_\ell^m\left(x\right)-2x\frac{d}{dx}P_\ell^m\left(x\right)+\frac{m-m\left(m+1\right)x^2}{1-x^2}P_\ell^m\left(x\right)&\\
+\left[\ell\left(\ell+1\right)-m\left(m+1\right)\right]P_\ell^m\left(x\right)&=0,
\end{aligned}
$$

ou ainda,

$$
\left(1-x^2\right)\frac{d^2}{dx^2}P_\ell^m\left(x\right)-2x\frac{d}{dx}P_\ell^m\left(x\right)+\left[\ell\left(\ell+1\right)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]P_\ell^m\left(x\right)=0,
$$

que é a equação que estávamos procurando. Esta dedução é a que foi usada no livro-texto do Arfken et al.

7 Exercício: mostre que

$$
P_\ell\left(x\right)=\frac{1}{2^\ell\ell!}\frac{d^\ell}{dx^\ell}\left(x^2-1\right)^\ell,
$$

que é a fórmula de Rodrigues.

8 Exercício: mostre que podemos definir

$$
\begin{aligned}
P_\ell^m\left(x\right)&\equiv\left(1-x^2\right)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_\ell\left(x\right)\\
&=\left(1-x^2\right)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}\frac{1}{2^\ell\ell!}\frac{d^\ell}{dx^\ell}\left(x^2-1\right)^\ell,
\end{aligned}
$$

isto é,

$$P_\ell^m(x) \equiv \left(1-x^2\right)^{m/2} \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} \left(x^2-1\right)^\ell .$$

Com isso, note que não há problema para definirmos também

$$P_\ell^{-m}(x) \equiv \left(1-x^2\right)^{-m/2} \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^{\ell-m}}{dx^{\ell-m}} \left(x^2-1\right)^\ell ,$$

desde que $m \leqslant \ell$.

9 **Exercício**: mostre que, de fato, se $m > \ell$, teremos

$$P_\ell^m(x) = 0.$$

10 **Exercício**: mostre que

$$P_\ell^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} P_\ell^m(x) .$$

Dica: o truque aqui é escrever

$$\frac{d^{\ell-m}}{dx^{\ell-m}} \left(x^2-1\right)^\ell = \frac{d^{\ell-m}}{dx^{\ell-m}} \left[(x+1)^\ell (x-1)^\ell\right]$$

e usar a fórmula de Leibnitz, isto é,

$$\frac{d^n}{dx^n} \left[f(x)\, g(x)\right] = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \left[\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} f(x)\right] \frac{d^k}{dx^k} g(x) ,$$

que já usamos acima.