Digressão: recordação de Introdução à Física Matemática: a equação de Euler

Notemos que a equação radial que aparece, por exemplo, no problema da equação de Laplace em duas dimensões é chamada de equação de Euler:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x p_0 \frac{dy}{dx} + q_0 y \quad = \quad 0.$$

O livro-texto faz a solução em detalhes desta equação diferencial. Aqui, para economizar tempo, vamos rever a apresentação do livro-texto, mas dentro do caso mais geral acima. Vamos supor que $p_0 \neq 0$ e $q_0 \neq 0$, mas depois o método poderá ser aplicado para o caso geral em que essa suposição não se aplica.

É intuitivo especular que, talvez, a solução da equação dada seja parecida com a solução da equação de Euler, mas com correções de ordem superior na variável x. Logo, vamos usar o que já aprendemos para resolver a equação de Euler. Vamos usar o método do fator integrante. Note que neste caso os coeficientes não são constantes. Mas como temos um fator x^2 na segunda derivada e um fator x na primeira derivada, podemos tentar o seguinte ansatz:

$$\left(x \frac{d}{dx} + \alpha \right) \left(x \frac{d}{dx} + \beta \right) y \quad = \quad 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\left(x \frac{d}{dx} + \alpha \right) \left(x \frac{d}{dx} + \beta \right) y \quad &= \quad x \frac{d}{dx} \left(x \frac{d}{dx} + \beta \right) y + \alpha \left(x \frac{d}{dx} + \beta \right) y \\
&= \quad x \frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} + \beta y \right) + \alpha x \frac{dy}{dx} + \alpha \beta y \\
&= \quad x \frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + \beta x \frac{dy}{dx} + \alpha x \frac{dy}{dx} + \alpha \beta y \\
&= \quad x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + \beta x \frac{dy}{dx} + \alpha x \frac{dy}{dx} + \alpha \beta y \\
&= \quad x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + (\alpha + \beta + 1)\, x \frac{dy}{dx} + \alpha \beta y
\end{aligned}$$

deve ser igual a

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x p_0 \frac{dy}{dx} + q_0 y,$$

implicando que

$$(\alpha + \beta + 1) \quad = \quad p_0$$

e

$$\alpha \beta \quad = \quad q_0.$$

Vamos resolver a equação para β na segunda equação e substituir na primeira; depois nós resolvemos para α. Então,

$$\beta = \frac{q_0}{\alpha}$$

e, portanto,

$$\alpha + \frac{q_0}{\alpha} + 1 - p_0 = 0,$$

isto é,

$$\alpha^2 + (1 - p_0)\,\alpha + q_0 = 0.$$

Teremos duas soluções para α :

$$\alpha_\pm = \frac{p_0 - 1 \pm \sqrt{(1 - p_0)^2 - 4q_0}}{2}.$$

Veja que

$$\begin{aligned}
\beta_\pm &= \frac{2q_0}{p_0 - 1 \pm \sqrt{(1 - p_0)^2 - 4q_0}} \\
&= \frac{2q_0\left[p_0 - 1 \mp \sqrt{(1 - p_0)^2 - 4q_0}\right]}{\left[p_0 - 1 \pm \sqrt{(1 - p_0)^2 - 4q_0}\right]\left[p_0 - 1 \mp \sqrt{(1 - p_0)^2 - 4q_0}\right]} \\
&= \frac{2q_0\left[p_0 - 1 \mp \sqrt{(1 - p_0)^2 - 4q_0}\right]}{(p_0 - 1)^2 - (1 - p_0)^2 + 4q_0} \\
&= \frac{p_0 - 1 \mp \sqrt{(1 - p_0)^2 - 4q_0}}{2} \\
&= \alpha_\mp.
\end{aligned}$$

Com isso vemos que a nossa equação de Euler pode ser escrita como

$$\left(x\frac{d}{dx} + \alpha_+\right)\left(x\frac{d}{dx} + \alpha_-\right) y = 0.$$

Vamos agora definir:

$$s \equiv \left(x\frac{d}{dx} + \alpha_-\right) y$$

e aí ficamos com

$$\left(x\frac{d}{dx} + \alpha_+\right) s = 0.$$

Dividindo tudo por x, vem:

$$\left(\frac{d}{dx}+\frac{1}{x}\alpha_{+}\right)s \quad = \quad 0.$$

Com a metodologia do fator integrante, precisamos achar uma função $\mu=\mu\left(x\right)$ tal que

$$\mu\left(\frac{d}{dx}+\frac{1}{x}\alpha_{+}\right)s \quad = \quad \frac{d}{dx}\left(\mu s\right).$$

Como

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\mu s\right) &= \mu\frac{ds}{dx}+s\frac{d\mu}{dx}\\ &= \mu\left(\frac{d}{dx}+\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx}\right)s,\end{aligned}$$

segue que, comparando com a equação acima, basta escolhermos μ tal que

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx} \quad = \quad \frac{1}{x}\alpha_{+}$$

e teremos nosso fator integrante. Esta equação é separável, ou seja,

$$\frac{d\mu}{\mu} \quad = \quad \alpha_{+}\frac{dx}{x}$$

e a integração de ambos os membros fornece:

$$\ln\mu \quad = \quad \alpha_{+}\ln x,$$

lembrando que $x>0$ por hipótese. Podemos ainda escrever:

$$\ln\mu \quad = \quad \ln x^{\alpha_{+}}.$$

Exponenciando ambos os membros, obtemos:

$$\mu \quad = \quad x^{\alpha_{+}}.$$

Com este fator integrante, podemos escrever a equação original agora como

$$\frac{d}{dx}\left(\mu s\right) \quad = \quad 0,$$

dando

$$\mu s \quad = \quad C_{1},$$

onde C_1 é uma constante arbitrária. Portanto,

$$s \quad = \quad C_{1}x^{-\alpha_{+}}.$$

Da definição de s e desta solução, vemos que

$$\left(x\frac{d}{dx}+\alpha_-\right)y \quad = \quad C_1 x^{-\alpha_+},$$

ou, dividindo tudo por x, obtemos

$$\left(\frac{d}{dx}+\frac{1}{x}\alpha_-\right)y \quad = \quad C_1 x^{-\alpha_+-1},$$

É claro que agora o fator integrante para esta equação que falta resolvermos é x^{α_-} e temos:

$$x^{\alpha_-}\left(\frac{d}{dx}+\frac{1}{x}\alpha_-\right)y \quad = \quad C_1 x^{-\alpha_+-1}x^{\alpha_-},$$

isto é,

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\alpha_-}y\right) \quad = \quad C_1 x^{-\alpha_+ +\alpha_- -1}.$$

Aqui precisamos distinguir duas situações: quando $\alpha_+ \neq \alpha_-$ e quando $\alpha_+ = \alpha_-$. Vamos considerar o primeiro caso, quando $\alpha_+ \neq \alpha_-$. Integrando em x ambos os membros da equação acima dá:

$$x^{\alpha_-}y \quad = \quad \frac{C_1}{-\alpha_+ +\alpha_-}x^{-\alpha_+ +\alpha_-}+C_-,$$

onde C_- é outra constante arbitrária. Podemos dividir tudo por x^{α_-} e obter:

$$y \quad = \quad C_+ x^{-\alpha_+}+C_- x^{-\alpha_-},$$

onde, por razões estéticas, definimos

$$C_+ \quad \equiv \quad \frac{C_1}{-\alpha_+ +\alpha_-}.$$

No segundo caso, isto é, quando $\alpha_+ = \alpha_- \equiv \alpha$, a equação acima fica

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\alpha}y\right) \quad = \quad C_1 x^{-1}$$

e, integração em ambos os membros fornece:

$$x^{\alpha}y \quad = \quad C_1 \ln x + C_2,$$

ou seja,

$$y \quad = \quad C_1 x^{-\alpha}\ln x + C_2 x^{-\alpha}.$$