A equação de Laplace

Esta equação já é conhecida dos cursos de física 3 e física 4. Temos que resolver

$$\nabla^2 \phi\left(x, y, z\right) = 0$$

em uma região V com fronteira $S\left(V\right)$. Aqui, em três dimensões, V é um volume no espaço e $S\left(V\right)$ é a superfície que serve de fronteira ao volume V e que, portanto, é uma superfície fechada. O livro-texto faz dois exemplos para as condições de Dirichlet, mas aqui vamos resolver só o segundo desses problemas, pois é menos trivial.

Digressão: exemplo de como a equação de Laplace aparece em problemas de eletrostática

Sabemos que o campo eletrostático é dado em termos do gradiente do potencial escalar:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\boldsymbol{\nabla}\phi \\ &= -\left(\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial \phi}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial \phi}{\partial z}\right), \end{aligned}$$

quando usamos coordenadas cartesianas. A lei de Gauss na forma diferencial é dada por

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Mas o divergente do campo eletrostático em coordenadas cartesiamas é dado por

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Como vimos acima,

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi,$$

logo

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} &= \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(-\boldsymbol{\nabla}\phi\right) \\ &= -\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\phi\right) \\ &= -\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\phi, \end{aligned}$$

onde escrevemos o operador diferencial vetorial nabla como

$$\boldsymbol{\nabla} = \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Como x, y e z são variáveis mutuamente independentes, segue que

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

para o qual utilizamos a notação

$$\begin{aligned}\nabla^2 &\equiv \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.\end{aligned}$$

Este operador diferencial de segunda ordem é chamado de laplaciano. Com isso, vemos que a lei de Gauss, em termos do potencial escalar agore pode ser escrita como

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Esta é a chamada equação de Poisson. Em regiões do espaço onde não há cargas, o potencial escalar deve satisfazer a equação de Laplace:

$$\nabla^2\phi = 0.$$

Exemplo: A equação de Laplace quando a fronteira é uma circunferência

Vamos considerar uma circunferência no plano xy centrada na origem. Seja a o raio dessa circunferência. Vamos considerar a equação de Laplace no círculo do plano xy cuja fronteira é a circuferência de raio a centrada na origem. Temos, então, no círculo de raio a centrado na origem que resolver a equação de Laplace bidimensional, isto é,

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0.$$

A condição de contorno especifica que, nos pontos da circunferência,

$$x^2+y^2 = a^2,$$

a função ϕ deve satisfazer

$$\phi|_{x^2+y^2=a^2} = f(\theta),$$

onde $f(\theta)$ é uma função de θ dada. Aqui, vamos usar $\theta\in[0,2\pi)$. Mas que θ é esta variável? Claro, estaremos usando coordenadas polares, ou seja,

$$x = r\cos\theta$$

e

$$y = r\text{sen}\theta,$$

pois a nossa simetria é circular no plano. Neste caso, temos que mudar a equação de Laplace acima para as novas coordenadas. Para fazer isso, notemos que o gradiente de uma função é dado por

$$\boldsymbol{\nabla} F = \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial F}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial F}{\partial y}.$$

Então, se usarmos agora

$$d\mathbf{r} = \hat{\mathbf{x}}dx + \hat{\mathbf{y}}dy,$$

vemos que

$$\begin{aligned} d\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\nabla} F &= dx\frac{\partial F}{\partial x} + dy\frac{\partial F}{\partial y} \\ &= dF, \end{aligned}$$

como deveria ser, já que $d\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\nabla} F$ é a derivada direcional de F ao longo de $\frac{d\mathbf{r}}{|d\mathbf{r}|}$, multiplicada por $|d\mathbf{r}|$. O gradiente dá a derivada no sentido onde a função F varia o máximo a partir do ponto onde está sendo calculada. A projeção do gradiente ao longo do versor $\frac{d\mathbf{r}}{|d\mathbf{r}|}$ dá a derivada da função F ao longo do sentido desse versor. Ao multiplicarmos a derivada (direcional, neste caso) por $|d\mathbf{r}|$, que é o incremento de variação da função F ao longo do versor $\frac{d\mathbf{r}}{|d\mathbf{r}|}$, vai dar exatamente a diferencial de F para o incremento $d\mathbf{r}$.

Como o produto escalar é um número "escalar", isto é, não muda por mudança de coordenadas, então nós podemos escrever $d\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\nabla} F$ usando qualquer sistema de coordenadas e ainda assim seu valor não vai mudar. Portanto, como em coordenadas cartesianas já vimos que o resultado disso da a diferencial de F, para coordenadas polares podemos usar, então,

$$d\mathbf{r} = \hat{\mathbf{r}}dr + \hat{\boldsymbol{\theta}}rd\theta$$

e ainda assim teremos

$$d\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\nabla} F = dF,$$

isto é,

$$\left(\hat{\mathbf{r}}dr + \hat{\boldsymbol{\theta}}rd\theta\right)\cdot\boldsymbol{\nabla} F = dF,$$

ou seja,

$$dr\left(\hat{\mathbf{r}}\cdot\boldsymbol{\nabla} F\right) + rd\theta\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\boldsymbol{\nabla} F\right) = dF.$$

Em coordenadas polares a função F é dada em termos de (r,θ), isto é,

$$F = F(r,\theta).$$

Então, a diferencial dessa função é escrita assim:

$$dF = dr\frac{\partial F}{\partial r} + d\theta\frac{\partial F}{\partial \theta}.$$

Logo, como

$$dr\left(\hat{\mathbf{r}}\cdot\boldsymbol{\nabla}F\right) + rd\theta\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\boldsymbol{\nabla}F\right) = dF,$$

segue que

$$dr\left(\hat{\mathbf{r}}\cdot\boldsymbol{\nabla}F\right) + rd\theta\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\boldsymbol{\nabla}F\right) = dr\frac{\partial F}{\partial r} + d\theta\frac{\partial F}{\partial \theta}.$$

Como os incrementos dr e $d\theta$ são arbitrários e mutuamente independentes, segue que

$$\hat{\mathbf{r}}\cdot\boldsymbol{\nabla}F = \frac{\partial F}{\partial r}$$

e

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\boldsymbol{\nabla}F = \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}.$$

Mas, como

$$\boldsymbol{\nabla}F = \hat{\mathbf{r}}\left(\hat{\mathbf{r}}\cdot\boldsymbol{\nabla}F\right) + \hat{\boldsymbol{\theta}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\boldsymbol{\nabla}F\right),$$

como é o caso para qualquer vetor, ou seja, dado um vetor $\mathbf{w}$ no plano xy, sempre é verdade que

$$\mathbf{w} = \hat{\mathbf{r}}\left(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{w}\right) + \hat{\boldsymbol{\theta}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\mathbf{w}\right).$$

Com isso, concluímos que, em coordenadas polares,

$$\boldsymbol{\nabla}F = \hat{\mathbf{r}}\frac{\partial F}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}.$$

Assim, o operador diferencial nabla em coordenadas polares planas fica

$$\boldsymbol{\nabla} = \hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Notemos também que

$$\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{x}}\cos\theta + \hat{\mathbf{y}}\mathrm{sen}\theta$$

e

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\hat{\mathbf{x}}\mathrm{sen}\theta + \hat{\mathbf{y}}\cos\theta.$$

Por causa disso, segue que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \theta} &= -\hat{\mathbf{x}}\mathrm{sen}\theta + \hat{\mathbf{y}}\cos\theta \\ &= \hat{\boldsymbol{\theta}}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial \theta} &= -\hat{\mathbf{x}}\cos\theta - \hat{\mathbf{y}}\mathrm{sen}\theta \\ &= -\hat{\mathbf{r}}.\end{aligned}$$

O Laplaciano, portanto, fica dado por

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}F) &= \left(\hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\cdot\left(\hat{\mathbf{r}}\frac{\partial F}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\right) \\ &= \hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r}\cdot\left(\hat{\mathbf{r}}\frac{\partial F}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\right) \\ &\quad +\hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\cdot\left(\hat{\mathbf{r}}\frac{\partial F}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\right) \\ &= (\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{r}})\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \left(\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\right) \\ &\quad +\frac{1}{r}\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\hat{\mathbf{r}}\frac{\partial F}{\partial r}\right)\right] + \frac{1}{r}\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)\right] \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\left[\left(\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \theta}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right) + \hat{\mathbf{r}}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta \partial r}\right] \\ &\quad +\frac{1}{r}\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial \theta}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r}\hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}\right] \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} \\ &\quad +\frac{1}{r}\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\left[\frac{1}{r}(-\hat{\mathbf{r}})\left(\frac{\partial F}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r}\hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}\right],\end{aligned}$$

ou seja,

$$\nabla^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}.$$