A integral gaussiana geral

Consideremos agora a integral

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-z_0 x^2\right) dx,$$

com $z_0 \in \mathbb{C}$, $z_0 \neq 0$ e $\mathrm{Re}\,(z_0) \geqslant 0$.

Resolução:

Quando $\mathrm{Re}\,(z_0) = 0$ obtemos o exemplo anterior. Consideremos, portano, o caso em que $\mathrm{Re}\,(z_0) > 0$. Novamente, podemos escrever:

$$I^2 = 2\pi \int_0^{\infty} r dr\, \exp\left(-z_0 r^2\right).$$

Para simplificar a notação, escrevamos:

$$z_0 = a - bi,$$

com $a > 0$ e b, como vimos, vamos escolher positivo ou negativo, mas não nulo, pois já sabemos que quando $b = 0$ obtemos o resultado do primeiro exemplo acima. Sendo assim,

$$I^2 = 2\pi \int_0^{\infty} r dr\, \exp\left(-a r^2\right) \exp\left(i b r^2\right).$$

Vamos, então, primeiro considerar o caso em que $b > 0$ e vamos usar o mesmo caminho da figura usada no exemplo anterior acima. Logo,

$$\lim_{R\to\infty} \oint_C z \exp\left(-z_0 z^2\right) dz = 0,$$

isto é,

$$\begin{aligned} 0 = & \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} z \exp\left(-z_0 z^2\right) dz \\ & + \lim_{R\to\infty} \left[\int_{C_1} z \exp\left(-z_0 z^2\right) dz + \int_{C_2} z \exp\left(-z_0 z^2\right) dz\right]. \end{aligned}$$

Novamente, temos que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} z \exp\left(-z_0 z^2\right) dz = 0$$

e, com isso,

$$\lim_{R\to\infty} \left[\int_{C_1} z \exp\left(-z_0 z^2\right) dz + \int_{C_2} z \exp\left(-z_0 z^2\right) dz\right] = 0.$$

Obviamente,

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_2} z\exp\left(-z_0z^2\right)dz \quad = \quad \frac{I^2}{2\pi}.$$

Resta-nos calcular apenas a integral

$$\begin{aligned}\int_{C_1} z\exp\left(-z_0z^2\right)dz &= \int_R^0 \tau\exp(i\theta)\exp\left[-z_0\tau^2\exp(2i\theta)\right]\exp(i\theta)\,d\tau\\ &= \left.\frac{\exp\left[-z_0\tau^2\exp(2i\theta)\right]}{2z_0}\right|_0^R\\ &= \frac{\exp\left[-z_0R^2\exp(2i\theta)\right]}{2z_0}-\frac{1}{2z_0}.\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}\exp\left[-z_0R^2\exp(2i\theta)\right] &= \exp\left[-z_0R^2(\cos 2\theta+i\mathrm{sen}2\theta)\right]\\ &= \exp\left[-(a-bi)R^2(\cos 2\theta+i\mathrm{sen}2\theta)\right]\\ &= \exp\left[-iR^2(-b\cos 2\theta+a\mathrm{sen}2\theta)\right]\\ &\quad\times\exp\left[-R^2(a\cos 2\theta+b\mathrm{sen}2\theta)\right].\end{aligned}$$

Como estamos considerando um caminho como o da figura do exemplo anterior, mas agora escolhendo $0<\theta<\pi/4$ para, com isso, termos tanto $\cos 2\theta$ como $\mathrm{sen}2\theta$ positivos. Logo, como neste caso estamos supondo $a,b>0$, segue que

$$\lim_{R\to\infty}\exp\left[-z_0R^2\exp(2i\theta)\right] \quad = \quad 0$$

e, assim,

$$\lim_{R\to\infty}\left[\int_{C_1} z\exp\left(-z_0z^2\right)dz+\int_{C_2} z\exp\left(-z_0z^2\right)dz\right] \quad = \quad 0$$

implica em

$$-\frac{1}{2z_0}+\frac{I^2}{2\pi} \quad = \quad 0,$$

ou seja,

$$I^2 \quad = \quad \frac{\pi}{z_0}.$$

Portanto,

$$I \quad = \quad \left(\frac{\pi}{z_0}\right)^{1/2}.$$

Como exercício, você pode fazer agora o caso em que $b<0$ e verificar que dá a mesma coisa, com a escolha $3\pi/4<\theta<2\pi$. Notemos que este resultado é geral. Quando escolhemos $z_0=a$, com $a>0$, obtemos o resultado do primeiro exemplo acima. Quando escolhemos $z_0=-i\alpha$, obtemos o resultado do exemplo anterior acima.

Outro exemplo

Outro exemplo é o cálculo da integral

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{\exp(ax)}{1+\exp(x)},$$

com $0 < a < 1$. Vamos novamente considerar um contorno fechado:

$$L \equiv \oint_{\Gamma_R} dz \, \frac{\exp(az)}{1+\exp(z)}.$$

Resta especificar o contorno fechado Γ_R. Notemos que há um polo em $z_0 = i\pi$. Há outros, mas vamos usar só esse mesmo. Tomemos Γ_R como o segmento $(-R, R)$ no eixo x, seguido do segmento que sobe paralelamente ao eixo y, dado por

$$z = R + 2\pi i\mu,$$

com μ variando desde 0 até 1. Depois vamos tomar o segmento que sai de $R + 2\pi i$ e termina em $-R + 2\pi i$, anti-paralelo ao eixo x. Assim, nesse trecho de Γ_R, temos a parametrização dada por

$$z = -\nu + 2\pi i,$$

com ν variando desde $-R$ até R. Finalmente, agora tomamos o segmento que sai do ponto $-R + 2\pi i$ e segue anti-paralelamente ao eixo y com a parametrização dada por

$$z = -R + 2\pi i\xi,$$

com ξ variando desde 1 até 0. Vemos, portanto, que

$$\begin{aligned} L &= \int_{-R}^{+R} dx \, \frac{\exp(ax)}{1+\exp(x)} + 2\pi i \int_{0}^{1} d\mu \, \frac{\exp(aR + 2\pi i a\mu)}{1+\exp(R+2\pi i\mu)} \\ &\quad - \int_{-R}^{R} d\nu \, \frac{\exp(-a\nu + 2\pi i a)}{1+\exp(-\nu+2\pi i)} + 2\pi i \int_{1}^{0} d\xi \, \frac{\exp(-aR + 2\pi i\xi a)}{1+\exp(-R+2\pi i\xi)}. \end{aligned}$$

Claramente, como o único polo envolvido nesse contorno é $z_0 = i\pi$, notamos que próximo a z_0 temos:

$$\begin{aligned} \frac{\exp(az)}{1+\exp(z)} &= \frac{\exp(az)}{1+\exp[i\pi + (z-i\pi)]} \\ &= \frac{\exp(az)}{1-\exp(z-i\pi)} \\ &\approx \frac{\exp(az)}{1-1-(z-i\pi)-\frac{1}{2}(z-i\pi)^2-\ldots} \\ &\approx -\frac{\exp(az)}{(z-i\pi)\left[1+\frac{1}{2}(z-i\pi)+\ldots\right]} \\ &\approx -\frac{\exp(az)}{(z-i\pi)} + \ldots \end{aligned}$$

O polo em $z_0 = i\pi$ é, portanto, de ordem 1. O resíduo ali é, assim, $-\exp(i\pi a)$. Com isso é evidente que

$$L = -2\pi i \exp(i\pi a).$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
-2\pi i \exp(i\pi a) &= \int_{-R}^{+R} dx \, \frac{\exp(ax)}{1+\exp(x)} + 2\pi i \int_0^1 d\mu \, \frac{\exp(aR + 2\pi i a\mu)}{1+\exp(R+2\pi i\mu)} \\
&\quad - \int_{-R}^{R} d\nu \, \frac{\exp(-a\nu + 2\pi i a)}{1+\exp(-\nu+2\pi i)} + 2\pi i \int_1^0 d\xi \, \frac{\exp(-aR + 2\pi i \xi a)}{1+\exp(-R+2\pi i\xi)}.
\end{aligned}
$$

Tomando agora o limite em que $R \to \infty$, vem:

$$
\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{+R} dx \, \frac{\exp(ax)}{1+\exp(x)} = K,
$$

$$
\lim_{R\to\infty} \int_0^1 d\mu \, \frac{\exp(aR + 2\pi i a\mu)}{1+\exp(R+2\pi i\mu)} = 0,
$$

pois

$$
\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty} \frac{\exp(aR)}{\exp(R)} &= \lim_{R\to\infty} \exp[-(1-a)R] \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

já que $0 < a < 1$,

$$
\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} d\nu \, \frac{\exp(-a\nu+2\pi i a)}{1+\exp(-\nu+2\pi i)} &= \exp(2\pi i a) \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} d\nu \, \frac{\exp(-a\nu)}{1+\exp(-\nu)} \\
&= \exp(2\pi i a) \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} d\nu \, \frac{\exp(a\nu)}{1+\exp(\nu)} \\
&= \exp(2\pi i a) K
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty} \int_1^0 d\xi \, \frac{\exp(-aR+2\pi i\xi a)}{1+\exp(-R+2\pi i\xi)} &= \lim_{R\to\infty} \left[\exp(-aR) \int_1^0 d\xi \, \frac{\exp(2\pi i\xi a)}{1+\exp(-R)\exp(2\pi i\xi)} \right] \\
&= \left[\lim_{R\to\infty} \exp(-aR) \right] \int_1^0 d\xi \, \frac{\exp(2\pi i \xi a)}{1+\lim_{R\to\infty}\exp(-R)\exp(2\pi i\xi)} \\
&= \left[\lim_{R\to\infty} \exp(-aR) \right] \int_1^0 d\xi \, \exp(2\pi i\xi a) \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

já que $0 < a < 1$. Em conclusão, vemos que

$$
-2\pi i \exp(i\pi a) = K + 0 - \exp(2\pi i a) K + 0,
$$

isto é,

$$
[1 - \exp(2\pi i a)] K = -2\pi i \exp(i\pi a),
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
K &= -\frac{2\pi i \exp(i\pi a)}{1-\exp(2\pi i a)} \\
&= -\frac{2\pi i}{\exp(-i\pi a)-\exp(\pi i a)} \\
&= \frac{2\pi i}{\exp(i\pi a)-\exp(-i\pi a)},
\end{aligned}
$$

ou ainda,

$$
K = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi a)}.
$$