Mais exemplos de integração no plano complexo

A integral gaussiana real

Consideremos agora a integral

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-ax^2\right) dx,$$

com $a \in \mathbb{R}$ e $a > 0$.

Resolução:

Aqui é fácil: é tudo real. Notemos que

$$\begin{aligned}
I^2 &= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-ax^2\right) dx\right]^2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-ax^2\right) dx \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-ay^2\right) dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dxdy \, \exp\left[-a\left(x^2+y^2\right)\right] \\
&= \int_{0}^{\infty} rdr \int_{0}^{2\pi} d\theta \, \exp\left(-ar^2\right) \\
&= 2\pi \int_{0}^{\infty} rdr \, \exp\left(-ar^2\right) \\
&= \pi \int_{0}^{\infty} d\left(r^2\right) \, \exp\left(-ar^2\right) \\
&= -\pi \, \frac{\exp\left(-ar^2\right)}{a}\Bigg|_{0}^{\infty} \\
&= \frac{\pi}{a}
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$I = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

A integral gaussiana agora fazendo a troca $a \to -i\alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$

Consideremos agora a integral

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(i\alpha x^2\right) dx,$$

com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\alpha \neq 0$.

Resolução:

Aqui já complica bem. Podemos nos inspirar na resolução do exemplo anterior e escrever:

$$
\begin{aligned}
I^2 &= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(i\alpha x^2\right) dx\right]^2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(i\alpha x^2\right) dx \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(i\alpha y^2\right) dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} dxdy \, \exp\left[i\alpha\left(x^2+y^2\right)\right] \\
&= \int_{0}^{\infty} rdr \int_{0}^{2\pi} d\theta \, \exp\left(i\alpha r^2\right) \\
&= 2\pi \int_{0}^{\infty} rdr \, \exp\left(i\alpha r^2\right).
\end{aligned}
$$

A ideia de usar integração no plano complexo para resolver esta integral, em princípio, envolveria encontrarmos um caminho fechado no plano complexo e tomar

$$
J \equiv \lim_{R\to\infty} \oint_C z \exp\left(i\alpha z^2\right) dz,
$$

onde gostaríamos de ter um parâmetro R que ao tender a infinito faz a integral J ficar, digamos, proporcional a I^2, que é a integral que queremos calcular.

No caso em que $\alpha = 0$, podemos escrever:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(i\alpha x^2\right) dx \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{+R} \exp\left(i\alpha x^2\right) dx \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{+R} dx \\
&= \lim_{R\to\infty} 2R \\
&= \infty.
\end{aligned}
$$

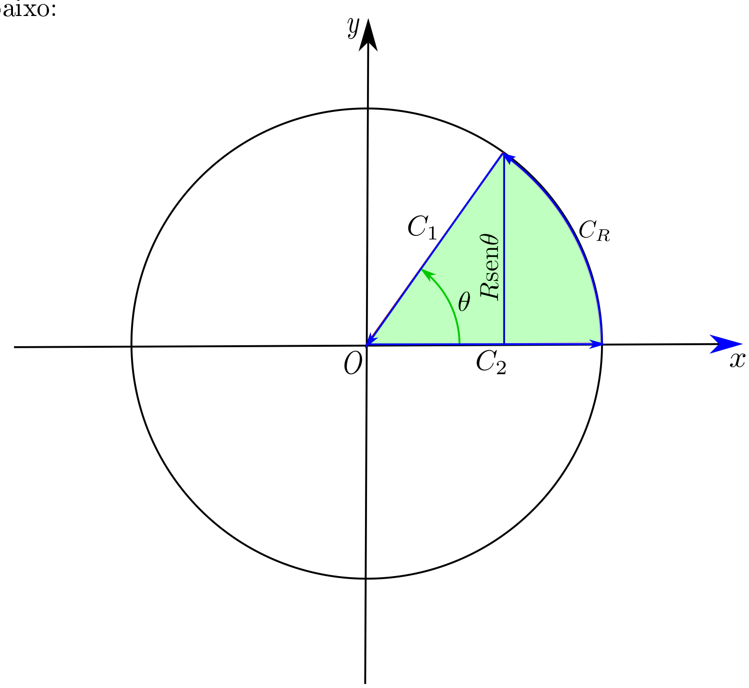
Por isso não incluímos $\alpha = 0$ neste exemplo. Agora podemos pensar que $\alpha > 0$ e depois consideramos o caso em que $\alpha < 0$. Vamos, como é usual, utilizar

$$
\begin{aligned}
z &= |z| \exp(i\theta) \\
&= |z| \cos\theta + i\,|z| \operatorname{sen}\theta.
\end{aligned}
$$

Como a integral é de 0 a ∞, então não vamos usar toda uma semi-circunferência como um trecho do caminho, como é usual quando toda a reta real faz parte do trajeto no limite em que $|z| \to \infty$. Além disso, na exponencial já temos i e temos z^2. Para quando $|z| \to \infty$ queremos que em um possível trecho de circunferência de raio $R \to \infty$ o integrando dê zero. Nesse caso, queremos que a parte imaginária de z^2 na exponencial seja positiva para, ao multiplicar z^2 por i, tenhamos uma exponencial que decresce no integrando. Então, calculemos:

$$
\begin{aligned}
z^2 &= |z|^2 \left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right) + 2i\,|z|^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta \\
&= |z|^2 \cos 2\theta + i\,|z|^2 \operatorname{sen}2\theta.
\end{aligned}
$$

Logo, vemos que, de fato, se θ for maior do que $\pi/2$ segue que sen2θ vai ser negativo e isso inviabiliza nossa estratégia, pois aí teríamos uma exponencial crescente no integrando. Podemos, então, pensar em usar um contorno como na figura abaixo:



Dessa forma, escolhendo $\theta < \pi/2$, definimos C tal que

$$C = C_R \cup C_1 \cup C_2,$$

onde C_R é um trecho de circunferência de raio R centrado na origem e C_1 e C_2 são os segmentos de reta de comprimento R que se encontram na origem, mas que fazem um ângulo (agudo) entre si de $\theta < \pi/2$. Dessa forma, vemos que

$$\begin{aligned} J &= \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} z \exp\left(i\alpha z^2\right) dz \\ &\quad + \lim_{R\to\infty} \left[\int_{C_1} z \exp\left(i\alpha z^2\right) dz + \int_{C_2} z \exp\left(i\alpha z^2\right) dz\right]. \end{aligned}$$

Claramente,

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} z \exp\left(i\alpha z^2\right) dz = 0$$

e, assim,

$$J = \lim_{R\to\infty} \left[\int_{C_1} z \exp\left(i\alpha z^2\right) dz + \int_{C_2} z \exp\left(i\alpha z^2\right) dz\right].$$

É evidente que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_2} z \exp\left(i\alpha z^2\right) dz = \lim_{R\to\infty} \int_0^R x \exp\left(i\alpha x^2\right) dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\infty x \exp\left(i\alpha x^2\right) dx \\
&= \frac{I^2}{2\pi}.
\end{aligned}
$$

Consideremos agora que sobre C_1 temos:

$$
\begin{aligned}
z &= \tau\cos\theta + i\tau\mathrm{sen}\theta \\
&= \tau\exp(i\theta),
\end{aligned}
$$

para o nosso $\theta < \pi/2$ fixo e o parâmetro τ variando desde $\tau = R$ até $\tau = 0$. Logo, sobre C_1, temos:

$$
dz = \exp(i\theta)\, d\tau
$$

e

$$
\begin{aligned}
z^2 &= \tau^2\cos 2\theta + i\tau^2\mathrm{sen}2\theta \\
&= \tau^2\exp(2i\theta).
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\int_{C_1} z\exp\left(i\alpha z^2\right) dz &= \int_R^0 \tau\exp(i\theta)\exp\left[i\alpha\tau^2\exp(2i\theta)\right]\exp(i\theta)\, d\tau \\
&= -\exp(2i\theta)\int_0^R \tau\exp\left[i\alpha\tau^2\exp(2i\theta)\right] d\tau \\
&= -\frac{1}{2}\exp(2i\theta)\int_0^R \exp\left[i\alpha\tau^2\exp(2i\theta)\right] d\left(\tau^2\right) \\
&= -\frac{1}{2}\exp(2i\theta)\left.\frac{\exp\left[i\alpha\tau^2\exp(2i\theta)\right]}{i\alpha\exp(2i\theta)}\right|_0^R \\
&= -\left.\frac{\exp\left[i\alpha\tau^2\exp(2i\theta)\right]}{2i\alpha}\right|_0^R \\
&= -\frac{\exp\left[i\alpha R^2\exp(2i\theta)\right]}{2i\alpha} + \frac{1}{2i\alpha}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\lim_{R\to\infty}\int_{C_1} z\exp\left(i\alpha z^2\right) dz = \frac{1}{2i\alpha} - \frac{1}{2i\alpha}\lim_{R\to\infty}\exp\left[i\alpha R^2\exp(2i\theta)\right].
$$

Mas,

$$
\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty}\exp\left[i\alpha R^2\exp(2i\theta)\right] &= \lim_{R\to\infty}\exp\left[i\alpha R^2(\cos 2\theta + i\mathrm{sen}2\theta)\right] \\
&= \lim_{R\to\infty}\left[\exp\left(i\alpha R^2\cos 2\theta\right)\exp\left(-\alpha R^2\mathrm{sen}2\theta\right)\right].
\end{aligned}
$$

Como $\mathrm{sen}2\theta > 0$, pois $\theta < \pi/2$, vemos que

$$
\lim_{R\to\infty}\exp\left[i\alpha R^2\exp(2i\theta)\right] = 0.
$$

Assim,

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_1} z\exp\left(i\alpha z^2\right)dz \quad = \quad \frac{1}{2i\alpha}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} J &= \lim_{R\to\infty}\left[\int_{C_1} z\exp\left(i\alpha z^2\right)dz + \int_{C_2} z\exp\left(i\alpha z^2\right)dz\right] \\ &= \frac{1}{2i\alpha} + \frac{I^2}{2\pi}. \end{aligned}$$

No entanto, como

$$J \quad = \quad \lim_{R\to\infty}\oint_C z\exp\left(i\alpha z^2\right)dz$$

e não há singularidade alguma dentro da região verde da figura acima, ou seja, a região cuja fronteira é o caminho fechado C, segue do teorema de Cauchy que

$$J \quad = \quad 0,$$

já que o integrando, $z\exp\left(i\alpha z^2\right)$, é uma função analítica nessa região. Sendo assim,

$$0 \quad = \quad \frac{1}{2i\alpha} + \frac{I^2}{2\pi}$$

e, assim,

$$I^2 \quad = \quad -\frac{\pi}{i\alpha},$$

ou seja,

$$I \quad = \quad \left(\frac{\pi}{\alpha}i\right)^{1/2}.$$

Note que quando $\alpha = ia$, com $a > 0$, obtemos o resultado do primeiro exemplo acima.

Para o caso em que $\alpha < 0$ basta tomarmos cuidado impondo agora que $3\pi/4 < \theta < \pi$, pois aí teremos $\cos 2\theta > 0$ e $\mathrm{sen} 2\theta < 0$ e, como $\alpha < 0$, vai dar o mesmo resultado acima mesmo quando $\alpha < 0$.