

Parte principal

Vamos considerar a situação da figura abaixo, em que temos um caminho fechado Γ contendo, na região da qual é fronteira, alguns polos de uma função $f(z)$. Além disso, consideremos também um polo simples de $f(z)$, isto é, um polo de ordem 1, sobre o eixo real em $z_0 \in \mathbb{R}$. Assim, a integral de $f(z)$ sobre o eixo real incluindo esse polo, não está definida. Mas, mesmo assim, definimos a parte principal da integral como:

$$P \int_{-R}^{+R} f(x) dx \equiv \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[\int_{-R}^{z_0 - \rho} f(x) dx + \int_{z_0 + \rho}^{+R} f(x) dx \right],$$

com $-R < z_0 < R$. Como podemos usar análise complexa para poder calcular esse limite? Para isso, consideremos a série de Laurent de $f(z)$ em uma vizinhança suficientemente próxima de z_0 . Como a vizinhança é suficientemente “pequena”, sempre podemos escolhê-la de forma a não incluir nenhum outro polo, exceto z_0 . Nessa vizinhança, então, podemos escrever:

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n^{(z_0)} (z - z_0)^n,$$

já que o polo em z_0 é simples. Vamos, então, considerar o caminho fechado como na figura abaixo, onde γ é a semi-circunferência centrada em z_0 e de raio infinitesimal ρ . Um ponto sobre γ é dado por

$$z = z_0 + \rho \exp(i\theta),$$

com θ variando de π até zero. À primeira vista há uma ambiguidade aqui, pois podemos ou excluir de Γ o polo z_0 , como está indicado na figura abaixo, ou incluí-lo e, assim, poderíamos ter um resultado diferente para cada caso. Em uma tal situação, o limite da parte principal não existiria. No entanto, em ambos os casos a contribuição total do polo z_0 é a mesma para a integral ao longo de Γ , seja este ponto incluído ou não no interior de Γ .

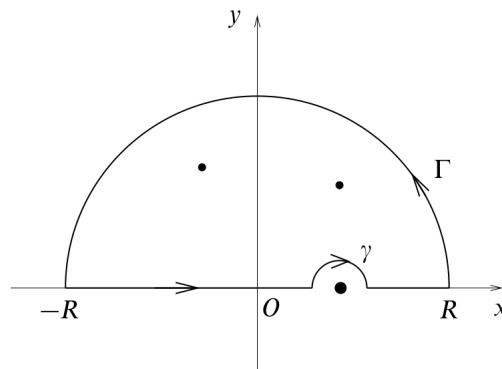


Figure 24.15 An indented contour used when the integrand has a simple pole on the real axis.

Para vermos que o limite é o mesmo em ambos os casos, consideremos a integral, igual à que aparece na figura acima:

$$\begin{aligned}
I_\rho &\equiv \int_{\pi, \gamma}^0 f(z) dz + \int_{\Gamma-\gamma} f(z) dz \\
&= \int_{\pi}^0 f(z_0 + \rho \exp(i\theta)) i\rho \exp(i\theta) d\theta + \int_{\Gamma-\gamma} f(z) dz \\
&= \int_{\pi}^0 \sum_{n=-1}^{\infty} a_n^{(z_0)} [\rho \exp(i\theta)]^n i\rho \exp(i\theta) d\theta + \int_{\Gamma-\gamma} f(z) dz \\
&= \int_{\pi}^0 a_{-1}^{(z_0)} [\rho \exp(i\theta)]^{-1} i\rho \exp(i\theta) d\theta + \int_{\Gamma-\gamma} f(z) dz \\
&= \int_{\pi}^0 a_{-1}^{(z_0)} i d\theta + \int_{\Gamma-\gamma} f(z) dz \\
&= -i\pi a_{-1}^{(z_0)} + \int_{\Gamma-\gamma} f(z) dz.
\end{aligned}$$

Mas como neste caso o polo z_0 está fora de Γ , segue que

$$I_\rho = 2\pi i \sum_k a_{-1}^{(z_k)},$$

onde os resíduos $a_{-1}^{(z_k)}$ são os resíduos de $f(z)$ dentro de Γ nos polos z_k que são diferentes de $a_{-1}^{(z_0)}$, isto é, $k \neq 0$. Logo,

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma-\gamma} f(z) dz &= I_\rho + i\pi a_{-1}^{(z_0)} \\
&= 2\pi i \sum_k a_{-1}^{(z_k)} + i\pi a_{-1}^{(z_0)}.
\end{aligned}$$

Vamos agora considerar o outro caso, o da semi-circunferência γ' de raio infinitesimal ρ que não está na figura acima, mas que dá a volta por baixo de z_0 , de forma que, neste caso, Γ inclui em seu interior o polo z_0 . Assim, um ponto sobre γ' é dado por

$$z = z_0 + \rho \exp(i\theta),$$

com θ variando de π até 2π . Logo, temos:

$$\begin{aligned}
J_\rho &\equiv \int_{\pi, \gamma'}^{2\pi} f(z) dz + \int_{\Gamma-\gamma'} f(z) dz \\
&= \int_{\pi}^{2\pi} f(z_0 + \rho \exp(i\theta)) i\rho \exp(i\theta) d\theta + \int_{\Gamma-\gamma'} f(z) dz \\
&= \int_{\pi}^{2\pi} \sum_{n=-1}^{\infty} a_n^{(z_0)} [\rho \exp(i\theta)]^n i\rho \exp(i\theta) d\theta + \int_{\Gamma-\gamma'} f(z) dz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\pi}^{2\pi} a_{-1}^{(z_0)} [\rho \exp(i\theta)]^{-1} i\rho \exp(i\theta) d\theta + \int_{\Gamma-\gamma'} f(z) dz \\
&= \int_{\pi}^{2\pi} a_{-1}^{(z_0)} i d\theta + \int_{\Gamma-\gamma'} f(z) dz \\
&= i\pi a_{-1}^{(z_0)} + \int_{\Gamma-\gamma'} f(z) dz.
\end{aligned}$$

Mas agora, como o próprio polo z_0 está na região Γ , temos:

$$J_{\rho} = 2\pi i \sum_k a_{-1}^{(z_k)} + 2i\pi a_{-1}^{(z_0)}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma-\gamma'} f(z) dz &= J_{\rho} - i\pi a_{-1}^{(z_0)} \\
&= 2\pi i \sum_k a_{-1}^{(z_k)} + 2i\pi a_{-1}^{(z_0)} - i\pi a_{-1}^{(z_0)} \\
&= 2\pi i \sum_k a_{-1}^{(z_k)} + i\pi a_{-1}^{(z_0)}.
\end{aligned}$$

Com isso, vemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma-\gamma} f(z) dz &= \int_{\Gamma-\gamma'} f(z) dz \\
&= 2\pi i \sum_k a_{-1}^{(z_k)} + i\pi a_{-1}^{(z_0)}.
\end{aligned}$$

Portanto, sendo C_R a porção de Γ que é a semi-circunferência de raio R , temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\gamma} f(z) dz &= \int_{C_R} f(z) dz + \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[\int_{-R}^{z_0-\rho} f(x) dx + \int_{z_0+\rho}^{+R} f(x) dx \right] \\
&= \int_{C_R} f(z) dz + \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[\int_{-R}^{z_0-\rho} f(x) dx + \int_{z_0+\rho}^{+R} f(x) dx \right] \\
&= \int_{C_R} f(z) dz + P \int_{-R}^{+R} f(x) dx.
\end{aligned}$$

E este resultado independe se incluímos z_0 ou não, antes de tomar o limite em que $\rho \rightarrow 0$, ou seja,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\gamma} f(z) dz = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\gamma'} f(z) dz.$$

Em ambos os casos, tudo se passa como se, ao invés de somar $2\pi i a_{-1}$, somamos apenas metade, isto é, $i\pi a_{-1}$. Bem informalmente, é como se fizéssemos mesmo

a integral sobre o eixo real, sobre o polo z_0 , e, como metade do polo está fora de Γ e a outra metade está dentro, então só o que está dentro é que contribui para a soma total de resíduos, ou seja, só meio resíduo, dando, para a integral sobre Γ , apenas $i\pi a_{-1}$ de contribuição. Enfatizamos, no entanto, que este raciocínio é puramente informal, não sendo de forma alguma rigoroso.

Lema de Jordan

O lema de Jordan usa como premissas que, para uma função $f(z)$, com $z \in \mathbb{C}$, se

- (i) $f(z)$ é analítica no semi-plano complexo superior, com exceção de um número finito de polos com $\text{Im}(z) > 0$,
- (ii) o máximo M de $|f(z)|$ tende a zero quando $|z| \rightarrow \infty$ no semi-plano complexo superior,
- (iii) $m > 0$,

então

$$I_{\Gamma} = \int_{\Gamma} \exp(imz) f(z) dz \rightarrow 0,$$

quando $R \rightarrow \infty$, onde Γ é o contorno semi-circular da figura abaixo, isto é, só a parte da semi-circunferência, sem o segmento de $-R$ até R .

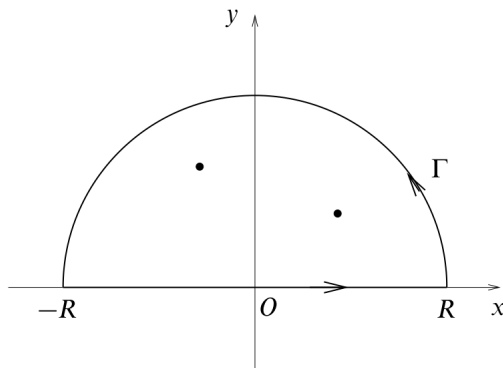
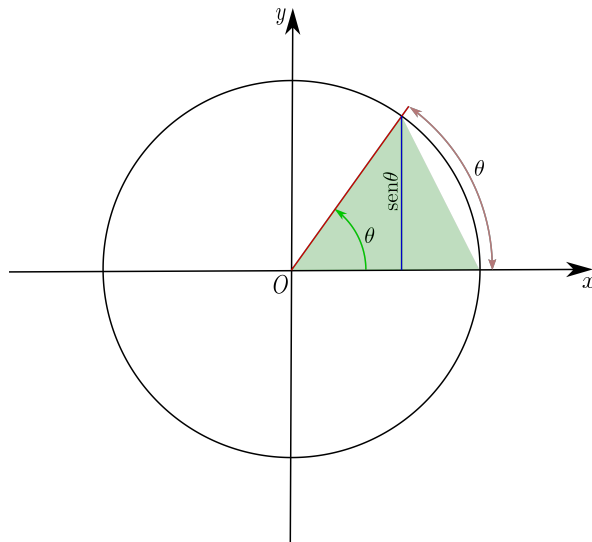


Figure 24.14 A semicircular contour in the upper half-plane.

Para demonstrar este lema, vamos inicialmente tomar $\theta \in [0, \pi/2]$. A figura abaixo de uma circunferência de raio unitário ilustra θ e $\text{sen}\theta$.



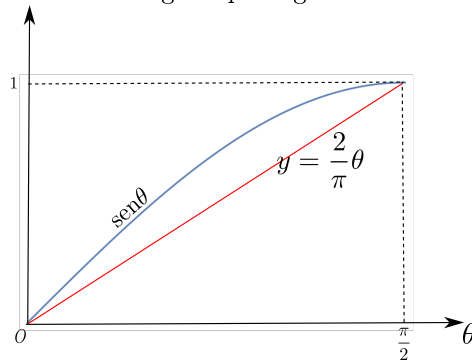
Vemos claramente nesta figura, olhando dentro da circunferência, que

$$\text{sen} \theta \leq \theta,$$

com a igualdade valendo apenas para θ no intervalo $\theta \in [0, \pi/2]$. Agora podemos olhar para o gráfico de $\text{sen} \theta$ como uma função de θ juntamente com a reta

$$y = \frac{2}{\pi} \theta,$$

como ilustra a figura que segue.



Vemos nesta figura que para qualquer $\theta \in [0, \pi/2]$ sempre

$$\text{sen} \theta \geq \frac{2}{\pi} \theta.$$

Portanto, ao mesmo tempo, para $\theta \in [0, \pi/2]$, vale

$$\theta \geq \text{sen} \theta \geq \frac{2}{\pi} \theta,$$

ou seja,

$$1 \geq \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \geq \frac{2}{\pi},$$

ou equivalentemente,

$$\frac{2}{\pi} \leq \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \leq 1.$$

Voltemos agora à demonstração do lema de Jordan. É evidente que, em Γ , podemos escrever

$$\begin{aligned} z &= R \exp(i\theta) \\ &= R \cos \theta + iR \operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} |I_\Gamma| &\leq \int_\Gamma |\exp(imz) f(z) dz| \\ &= \int_\Gamma |\exp(imz)| |f(z)| |dz| \\ &\leq \int_0^\pi \exp(-mR \operatorname{sen}\theta) MR d\theta \\ &= MR \int_0^{\pi/2} \exp(-mR \operatorname{sen}\theta) d\theta \\ &\quad + MR \int_{\pi/2}^\pi \exp(-mR \operatorname{sen}\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Mas, fazendo

$$\theta \rightarrow \pi - \theta$$

na segunda integral, obtemos:

$$\begin{aligned} |I_\Gamma| &\leq MR \int_0^{\pi/2} \exp(-mR \operatorname{sen}\theta) d\theta \\ &\quad - MR \int_{\pi/2}^0 \exp(-mR \operatorname{sen}\theta) d\theta \\ &= 2MR \int_0^{\pi/2} \exp(-mR \operatorname{sen}\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Mas, como vimos,

$$\operatorname{sen}\theta \geq \frac{2}{\pi}\theta,$$

isto é,

$$-\text{sen}\theta \leq -\frac{2}{\pi}\theta$$

e, com isso,

$$\begin{aligned} |I_\Gamma| &\leq 2MR \int_0^{\pi/2} \exp\left(-mR\frac{2}{\pi}\theta\right) d\theta \\ &= \frac{2MR\pi}{mR^2} \left[-\exp\left(-mR\frac{2}{\pi}\theta\right) \Big|_0^{\pi/2} \right] \\ &= \frac{2MR\pi}{mR^2} [1 - \exp(-mR)] \\ &= \frac{\pi}{m} M [1 - \exp(-mR)]. \end{aligned}$$

Por hipótese, $m > 0$ e M tende a zero quando $R \rightarrow \infty$ e, portanto, I_Γ tende a zero quando $R \rightarrow \infty$, como queríamos demonstrar.

Façamos agora um exemplo do livro-texto de Riley et al.

► Find the principal value of

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{x-a} dx, \quad \text{for a real, } m > 0.$$

A ideia aqui é usar o lema de Jordan. Não é difícil aqui se notarmos que

$$\exp(imx) = \cos(mx) + i\text{sen}(mx)$$

e, portanto, a integral acima é simplesmente a parte real da integral

$$I \equiv P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(imx)}{x-a} dx.$$

Como aqui, por hipótese, $m > 0$, segue que

$$\begin{aligned} I &= P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(imx)}{x-a} dx + 0 \\ &= P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(imx)}{x-a} dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_\Gamma \frac{\exp(imz)}{z-a} dz \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{C-\gamma} \frac{\exp(imz)}{z-a} dz, \end{aligned}$$

com $C-\gamma$ sendo a integral sobre o trecho ao longo do eixo real desde $-R$ até R , com exceção do ponto a , e depois sobre a semi-circunferência Γ da figura acima. Não há polo algum dentro de C exceto o “meio-polo” em a . Nesse caso, portanto, temos apenas que calcular o resíduo sobre a , que dá:

$$a_{-1} = \exp(ima).$$

Assim,

$$\begin{aligned}\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{C_{-R}} \frac{\exp(imz)}{z-a} dz &= i\pi a_{-1} \\ &= i\pi \exp(ima).\end{aligned}$$

Logo,

$$P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(mx)}{x-a} dx = -\pi \operatorname{sen}(ma)$$

e, como um bônus, se ao invés de tomar a parte real de I tomarmos a parte imaginária, obtemos também:

$$P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(mx)}{x-a} dx = \pi \cos(ma).$$