Integrais definidas usando integrais de contorno no plano complexo

Integrais de funções senoidais

Consideremos uma função que depende de $\cos\theta$ e $\text{sen}\theta$, digamos, $f(\cos\theta, \text{sen}\theta)$. Então, vamos usar integração complexa para resolver uma integral da forma:

$$I = \int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \text{sen}\theta)\, d\theta.$$

A prescrição é usarmos

$$z = \exp(i\theta),$$

com

$$\cos\theta = \frac{z + z^{-1}}{2}$$

e

$$\text{sen}\theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}.$$

Consideremos um exemplo do livro-texto de Riley et al.

►*Evaluate*

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}\, d\theta, \qquad b > a > 0. \tag{24.66}$$

A receita acima pode ser ainda refinada com

$$\cos(n\theta) = \frac{z^n + z^{-n}}{2}$$

e

$$\text{sen}(n\theta) = \frac{z^n - z^{-n}}{2i}.$$

Então, no exemplo, podemos escrever:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{\frac{z^2+z^{-2}}{2}}{a^2 + b^2 - 2ab\frac{z+z^{-1}}{2}}\, d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{z^2 + z^{-2}}{a^2 + b^2 - ab\left(z + z^{-1}\right)}\, d\theta. \end{aligned}$$

Vamos, porém, escrever esta integral explicitamente como uma integral no contorno C no plano complexo, sobre a circunferência de raio unitário centrada na origem, ao longo do sentido anti-horário. Sendo

$$z = \exp(i\theta),$$

vemos que

$$\begin{aligned} dz &= i\exp(i\theta)\,d\theta \\ &= izd\theta, \end{aligned}$$

isto é,

$$d\theta = \frac{dz}{iz}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2i}\oint_C \frac{z^2+z^{-2}}{a^2+b^2-ab\left(z+z^{-1}\right)}\frac{dz}{z} \\ &= \frac{1}{2i}\oint_C \frac{z^4+1}{z^2\left[\left(a^2+b^2\right)z-ab\left(z^2+1\right)\right]}dz \\ &= \frac{i}{2ab}\oint_C \frac{z^4+1}{z^2\left[z^2-\left(\frac{a^2+b^2}{ab}\right)z+1\right]}dz. \end{aligned}$$

Podemos agora considerar os polos no denominador, além de zero. Para isso, resolvemos:

$$z^2-\left(\frac{a^2+b^2}{ab}\right)z+1 = 0,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} z_\pm &= \frac{a^2+b^2}{2ab}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{a^2+b^2}{ab}\right)^2-4} \\ &= \frac{a^2+b^2}{2ab}\pm\frac{1}{2ab}\sqrt{\left(a^2+b^2\right)^2-4a^2b^2} \\ &= \frac{a^2+b^2}{2ab}\pm\frac{1}{2ab}\sqrt{a^4+2a^2b^2+b^4-4a^2b^2} \\ &= \frac{a^2+b^2}{2ab}\pm\frac{1}{2ab}\sqrt{a^4-2a^2b^2+b^4} \\ &= \frac{a^2+b^2}{2ab}\pm\frac{1}{2ab}\sqrt{\left(a^2-b^2\right)^2} \end{aligned}$$

e, como $b>a>0$, segue que

$$z_\pm = \frac{a^2+b^2}{2ab}\pm\frac{b^2-a^2}{2ab},$$

isto é,

$$z_+ = \frac{b}{a}$$

e

$$z_- = \frac{a}{b}.$$

Portanto,

$$z^2 - \left(\frac{a^2+b^2}{ab}\right) z + 1 = \left(z - \frac{a}{b}\right)\left(z - \frac{b}{a}\right).$$

Como $a < b$, então o único polos que está dentro do círculo de raio unitário é a/b. Logo, temos três polos: 0, a/b e b/a, mas só 0 e a/b estão dentro de C. Em 0 o polo é de segunda ordem e em a/b o polo é de primeira ordem. Vamos calcular os resíduos agora. Em 0, porque é segunda ordem, usamos a fórmula da aula passada:

$$\begin{aligned}
a_{-1}(0) &= \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left\{ z^2 \frac{i}{2ab} \frac{z^4+1}{z^2\left[z^2 - \left(\frac{a^2+b^2}{ab}\right)z + 1\right]}\right\} \\
&= \frac{i}{2ab} \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left[\frac{z^4+1}{z^2 - \left(\frac{a^2+b^2}{ab}\right)z + 1}\right] \\
&= \frac{i}{2ab} \lim_{z\to 0}\left\{ \frac{4z^3}{z^2 - \left(\frac{a^2+b^2}{ab}\right)z + 1} - \frac{\left(z^4+1\right)\left(2z - \frac{a^2+b^2}{ab}\right)}{\left[z^2 - \left(\frac{a^2+b^2}{ab}\right)z + 1\right]^2}\right\} \\
&= \frac{i}{2}\left(\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}\right).
\end{aligned}$$

Já o resíduo em a/b, que é simples, também pode ser calculado pela fórmula da aula passada:

$$\begin{aligned}
a_{-1}(a/b) &= \lim_{z\to a/b}\left\{\left(z - \frac{a}{b}\right)\frac{i}{2ab}\frac{z^4+1}{z^2\left[z^2 - \left(\frac{a^2+b^2}{ab}\right)z + 1\right]}\right\} \\
&= \frac{i}{2ab}\lim_{z\to a/b}\left[\left(z - \frac{a}{b}\right)\frac{z^4+1}{z^2\left(z - \frac{a}{b}\right)\left(z - \frac{b}{a}\right)}\right] \\
&= \frac{i}{2ab}\lim_{z\to a/b}\left[\frac{z^4+1}{z^2\left(z - \frac{b}{a}\right)}\right] \\
&= \frac{i}{2ab}\left[\frac{\frac{a^4}{b^4}+1}{\frac{a^2}{b^2}\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)}\right] \\
&= \frac{i}{2ab}\left[\frac{a^4+b^4}{a^2b^2\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)}\right] \\
&= \frac{i}{2a^2b^2}\frac{a^4+b^4}{\left(a^2-b^2\right)}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
I &= 2\pi i\left[a_{-1}(0)+a_{-1}(a/b)\right] \\
&= 2\pi i\frac{i}{2a^2b^2}\left(a^2+b^2+\frac{a^4+b^4}{a^2-b^2}\right) \\
&= 2\pi i\frac{i}{2a^2b^2}\left(\frac{a^4-b^4+a^4+b^4}{a^2-b^2}\right) \\
&= 2\pi i\frac{i}{2a^2b^2}\left(\frac{2a^4}{a^2-b^2}\right) \\
&= -2\pi\frac{1}{b^2}\left(\frac{a^2}{a^2-b^2}\right) \\
&= \frac{2\pi a^2}{b^2\left(b^2-a^2\right)}.
\end{aligned}$$

Algumas integrais infinitas

Vamos considerar integrais da seguinte forma:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

onde $f(z)$ tem as seguintes propriedades:

(i) $f(z)$ é analítica no meio-plano complexo superior, isto é, $\mathrm{Im}(z) \geqslant 0$, exceto em um número finito de polos, nenhum dos quais está sobre o eixo real;

(ii) em um contorno C_R (semi-circunferência de raio R) que é a parte curva da fronteira total Γ de um semi-disco de raio R (veja a figura abaixo), vale que R vezes o máximo de $|f(z)|$, com $z \in \Gamma$, tende a zero quando $R \to \infty$, sendo uma condição suficiente que $zf(z) \to 0$ quando $|z| \to \infty$;

(iii) tanto $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$ como $\int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx$ existem.

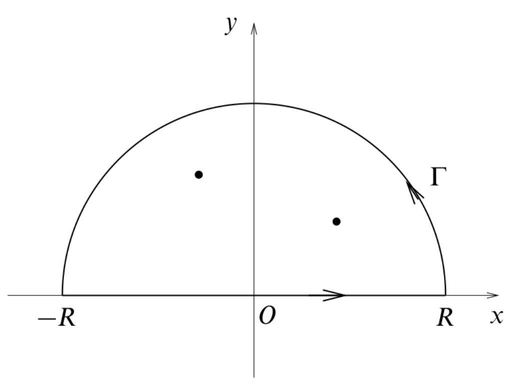

Figure 24.14 A semicircular contour in the upper half-plane.

Vamos ilustrar como procedemos com um exemplo do livro-texto de Riley et al.

►*Evaluate*

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^4}, \qquad \textit{where } a \textit{ is real.}$$

Podemos reescrever esta integral assim:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2\left(x^2+a^2\right)^4}.$$

Agora vamos considerar Γ como na figura acima e escrever:

$$J(R) = \frac{1}{2}\oint_{\Gamma} \frac{dz}{\left(z^2+a^2\right)^4},$$

onde precisamos conectar $J(R)$ com a integral desejada I, pois enquanto J sai do eixo x, I fica sempre na reta real, além de percorrer todos os valores de $x \in \mathbb{R}$. Vemos que a função do integrando de $J(R)$ é

$$f(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{\left(z^2+a^2\right)^4}$$

e, portanto,

$$\lim_{|z|\to\infty} z f(z) = 0.$$

Então, podemos ver claramente que

$$J(R) = \frac{1}{2}\int_{C_R} \frac{dz}{\left(z^2+a^2\right)^4} + \frac{1}{2}\int_{-R}^{+R} \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^4},$$

onde C_R é apenas a semi-circunferência de raio R. Claramente, então, vemos que

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} \frac{dz}{\left(z^2+a^2\right)^4} = 0$$

e

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2}\int_{-R}^{+R} \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^4} = I,$$

de forma que

$$I = \lim_{R\to\infty} J(R).$$

Calculemos, então $J(R)$ para R suficientemente grande que todos os polos acima do eixo x estejam dentro de Γ. Podemos escrever:

$$\begin{aligned}
J(R) &= \frac{1}{2}\oint_{\Gamma}\frac{dz}{\left[(z-ia)(z+ia)\right]^4}\\
&= \frac{1}{2}\oint_{\Gamma}\frac{dz}{(z-ia)^4(z+ia)^4}
\end{aligned}$$

e vemos que temos um polo de ordem 4 em ia. O resíduo nesse ponto dá:

$$\begin{aligned}
a_{-1} &= \frac{1}{3!}\lim_{z\to ia}\frac{d^3}{dz^3}\left[(z-ia)^4\frac{1}{2}\frac{1}{(z-ia)^4(z+ia)^4}\right]\\
&= \frac{1}{12}\lim_{z\to ia}\frac{d^3}{dz^3}\frac{1}{(z+ia)^4}\\
&= \frac{1}{12}\lim_{z\to ia}(-4)(-5)(-6)\frac{1}{(z+ia)^7}\\
&= -\frac{6\times5\times4}{12}\frac{1}{(2ia)^7}\\
&= \frac{5\times2}{2^7a^7i}\\
&= \frac{5}{64a^7i}
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
J(R) &= 2\pi i a_{-1}\\
&= \frac{5\pi}{32a^7}
\end{aligned}$$

e, assim,

$$I = \frac{5\pi}{32a^7}.$$