Façamos agora alguns exemplos do livro-texto de Riley et al.

►*Find the Laurent series of*

$$f(z) = \frac{1}{z(z-2)^3}$$

*about the singularities $z = 0$ and $z = 2$ (separately). Hence verify that $z = 0$ is a pole of order 1 and $z = 2$ is a pole of order 3, and find the residue of $f(z)$ at each pole.*

Comecemos com $z_0 = 0$. Podemos escrever:

$$\begin{aligned}
f(z) &= -\frac{1}{z(2-z)^3} \\
&= -\frac{1}{8z\left(1-\frac{z}{2}\right)^3} \\
&= -\frac{1}{8z}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n\right]^3 \\
&= -\frac{1}{8z}\left[1+\frac{z}{2}+\left(\frac{z}{2}\right)^2+\ldots\right]^3 \\
&= -\frac{1}{8z}\left\{1+3\frac{z}{2}+3\left(\frac{z}{2}\right)^2+\ldots+3\left[\frac{z}{2}+\left(\frac{z}{2}\right)^2+\ldots\right]^2+\ldots\right\} \\
&= -\frac{1}{8z}\left(1+3\frac{z}{2}+\frac{3}{4}z^2+\ldots+3\frac{z^2}{4}+\ldots\right) \\
&= -\frac{1}{8z}\left(1+3\frac{z}{2}+\frac{3}{2}z^2+\ldots\right) \\
&= -\frac{1}{8z}-\frac{3}{16}-\frac{3}{16}z+\ldots
\end{aligned}$$

e vemos que $z_0 = 0$ é um polo de primeira ordem e o resíduo é dado por $-1/8$.

Agora tomemos $z_0 = 2$. Neste caso, escrevemos:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z(z-2)^3} \\
&= \frac{1}{(2+z-2)(z-2)^3} \\
&= \frac{1}{2(z-2)^3\left(1+\frac{z-2}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{2(z-2)^3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{2}\right)^n \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n(z-2)^{n-3} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{(z-2)^3}-\frac{1}{4}\frac{1}{(z-2)^2}+\frac{1}{8}\frac{1}{(z-2)}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}(z-2)+\ldots
\end{aligned}$$

Logo, temos um polo de ordem 3 em $z_0 = 2$ e o resíduo dá $1/8$.

►*Suppose that $f(z)$ has a pole of order $m$ at the point $z = z_0$. By considering the Laurent series of $f(z)$ about $z_0$, derive a general expression for the residue $R(z_0)$ of $f(z)$ at $z = z_0$. Hence evaluate the residue of the function*

$$f(z) = \frac{\exp iz}{(z^2+1)^2}$$

*at the point $z = i$.*

A série de Laurent quando temos um polo de ordem $m$ em $z_0$ é dada, como vimos, por

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z-z_0)^n .$$

Então,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \frac{a_{-m+2}}{(z-z_0)^{m-2}} + \ldots \\ & \ldots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1 (z-z_0) + \ldots \end{aligned}$$

Queremos isolar $a_{-1}$, que, por definição, é o resíduo. O truque é multiplicar tudo por $(z-z_0)^m$ e tomar $m-1$ derivadas, de forma a eliminar todos os termos divergentes quando fazemos $z \to z_0$ e preservarmos $a_{-1}$, zerando todos os termos seguintes na série, já que serão proporcionais a potências positivas de $(z-z_0)$. Então, multiplicando tudo por $(z-z_0)^m$, obtemos

$$\begin{aligned} (z-z_0)^m f(z) &= a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0) + a_{-m+2}(z-z_0)^2 + \ldots \\ & \ldots + a_{-1}(z-z_0)^{m-1} + a_0 (z-z_0)^m + a_1 (z-z_0)^{m+1} + \ldots \end{aligned}$$

Tomando $m-1$ derivadas termo a termo desta série, obtemos:

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right] = (m-1)!a_{-1} + m!a_0 (z-z_0) + \frac{m!}{2} a_1 (z-z_0)^2 + \ldots$$

Logo,

$$\lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right] = (m-1)!a_{-1},$$

isto é, o resíduo é dado por:

$$a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right].$$

Vejamos agora a função dada:

$$f(z) = \frac{\exp(iz)}{(z^2+1)^2}.$$

Temos que determinar o resíduo para $z_0 = i$. Certamente que a exponencial não tem qualquer resíduo neste ponto. Já o denominador, podemos escrever como

$$\begin{aligned} \left(z^2+1\right)^2 &= \left[(z+i)(z-i)\right]^2 \\ &= (z+i)^2 (z-i)^2 \end{aligned}$$

e descobrimos que o polo é de segunda ordem em $z_0 = i$. Aqui, portanto, utilizamos nossa fórmula acima com $m = 2$, obtendo:

$$\begin{aligned}
a_{-1} &= \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to i}\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}\left[(z-i)^2\frac{\exp(iz)}{(z^2+1)^2}\right] \\
&= \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[(z-i)^2\frac{\exp(iz)}{(z+i)^2(z-i)^2}\right] \\
&= \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{\exp(iz)}{(z+i)^2}\right] \\
&= \lim_{z\to i}\left[i\frac{\exp(iz)}{(z+i)^2} - 2\frac{\exp(iz)}{(z+i)^3}\right] \\
&= i\frac{\exp(-1)}{(2i)^2} - 2\frac{\exp(-1)}{(2i)^3} \\
&= -i\frac{\exp(-1)}{4} - 2i\frac{\exp(-1)}{8} \\
&= -i\frac{\exp(-1)}{4} - i\frac{\exp(-1)}{4}
\end{aligned}$$

e, assim,

$$a_{-1} = -i\frac{\exp(-1)}{2}.$$

## Teorema dos resíduos

Vamos supor que há um polo de ordem $m$ em um ponto $z_0$ de uma região $\mathcal{R}$ com fronteira $C$ onde, exceto em $z_0$, a função $f(z)$ é analítica. Então, o que podemos escrever é que

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z-z_0)^n.$$

Vamos fazer a integral em $C$ desta função:

$$\oint_C f(z)\,dz = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n \oint_C (z-z_0)^n\,dz.$$

Vamos escolher agora um contorno circular $C_\varepsilon$ centrado em $z_0$ e de raio $\varepsilon$. Pelo teorema de Cauchy podemos concluir que

$$\oint_C (z-z_0)^n\,dz = \oint_{C_\varepsilon} (z-z_0)^n\,dz.$$

Então, escolhemos uma parametrização de $C_\varepsilon$ em termos do parâmetro $\theta$ tal que

$$z = z_0 + \varepsilon\exp(i\theta),$$

com $\theta$ variando desde 0 até $2\pi$. Sendo assim,

$$\begin{aligned}\oint_C (z-z_0)^n\,dz &= \int_0^{2\pi} \varepsilon^n \exp(in\theta)\,i\varepsilon\exp(i\theta)\,d\theta \\ &= i\varepsilon^{n+1}\int_0^{2\pi}\exp[i(n+1)\theta]\,d\theta.\end{aligned}$$

Suponhamos que $n \neq -1$. Então, neste caso,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\exp[i(n+1)\theta]\,d\theta &= \left.\frac{\exp[i(n+1)\theta]}{i(n+1)}\right|_0^{2\pi} \\ &= 0,\end{aligned}$$

pois,

$$\begin{aligned}\exp[i(n+1)2\pi] &= \cos[(n+1)2\pi] + i\mathrm{sen}[(n+1)2\pi] \\ &= 1.\end{aligned}$$

Suponhamos agora que $n = -1$. Então, temos:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\exp[i(n+1)\theta]\,d\theta &= \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 2\pi.\end{aligned}$$

Logo,

$$\oint_C (z-z_0)^n\,dz = 2\pi i\varepsilon^{n+1}\delta_{n,-1}.$$

Portanto, com este resultado, obtemos:

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)\,dz &= \sum_{n=-m}^{\infty} a_n 2\pi i\varepsilon^{n+1}\delta_{n,-1} \\ &= 2\pi i a_{-1}.\end{aligned}$$

No caso de termos mais do que um polo dentro da região com fronteira $C$, segue o teorema dos resíduos:

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{res} a_{-1}^{res},$$

onde a soma é sobre os vários resíduos $a_{-1}^{res}$.

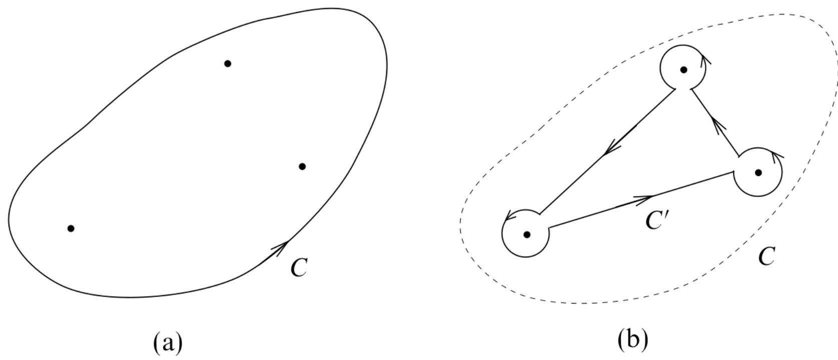


Figure 24.13 The contours used to prove the residue theorem: (a) the original contour; (b) the contracted contour encircling each of the poles.

Só para vermos como é o raciocínio quando temos, por exemplo, os três polos da figura acima. Como já vimos, considerando o caminho $C'$ do item (b) da figura acima, podemos escrever que

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_{C'} f(z)\,dz.$$

Mas vemos que se o triângulo interno tender a se fechar, os três polos tenderão a ser fechados em círculos que podemos escolher como tendo raios iguais a $\varepsilon$ que faremos tender a zero. Como $f(z)$ só não é analítica, por hipótese, nos três polos deste exemplo, então a integral sobre o contorno triangular será nula e só sobrarão as contribuições nas circunferências em torno dos polos, isto é,

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)\,dz + \oint_{C_2} f(z)\,dz + \oint_{C_3} f(z)\,dz,$$

que como vimos acima, no caso de um só polo, podemos agora considerar o resultado para cada um dos caminhos $C_1$, $C_2$ e $C_3$. Obtemos:

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)\,dz &= 2\pi i a_{-1}^{(1)} + 2\pi i a_{-1}^{(2)} + 2\pi i a_{-1}^{(3)} \\ &= 2\pi i\left(a_{-1}^{(1)} + a_{-1}^{(2)} + a_{-1}^{(3)}\right),\end{aligned}$$

ou seja, a integral em $C$ é igual a $2\pi i$ vezes a soma dos resíduos dentro da região cuja fronteira é $C$. Assim provamos o teorema dos resíduos, que pode ser estendido para qualquer número de resíduos internos à região cuja fronteira é $C$.