Teorema da identidade

►*Show that if $f(z)$ and $g(z)$ are analytic in some region R, and $f(z) = g(z)$ within some subregion S of R, then $f(z) = g(z)$ throughout R.*

Vamos seguir o livro e escrever

$$h(z) \quad = \quad f(z) - g(z).$$

Assim, se $z \in S$, vemos que $h(z) = 0$. Nós precisamos cobrir toda a região R com círculos de todos os tamanhos, de forma que cada um dos pontos de R pertença a algum desses círculos. Agora podemos pensar nos círculos que tenham pontos tanto em R como em sua subregião S também. Para um desses círculos, vamos pegar agora $z_0 \in S$ e $z \in R - S$. Como $h(z)$ é analítica em R, segue que podemos expandir $h(z)$ em série de Taylor em torno de z_0, isto é,

$$h(z) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

Como $z_0 \in S$, já sabemos que $h(z_0) = 0$ e, portanto, por $h(z')$ ser analítica em torno de z_0 dentro ainda de S, lá temos que ter todas suas derivadas nulas e, portanto,

$$h(z) \quad = \quad 0$$

em todos os pontos do círculo que estávamos considerando. Agora podemos incluir como a região onde $h(z) = 0$ não só S, mas a união de S com o círculo mencionado. Vemos, portanto, que procendendo de forma análoga podemos mostrar que $h(z)$ se anula em toda a região R. Este resultado é chamado de teorema da identidade.

Série de Laurent

A ideia agora é considerar uma região $\mathcal{R}$ circular do plano complexo, com a circunferência C como fronteira e cujo centro é z_0. Vamos supor que a função $f(z)$ é analítica em todos os pontos de $\mathcal{R}$ e de C, exceto em z_0, onde $f(z)$ tem um polo de ordem p. Pelo que vimos nas aulas anteriores, a função

$$g(z) \quad \equiv \quad (z - z_0)^p f(z)$$

é analítica em $\mathcal{R}$, em C e também em z_0. Logo, podemos expandir $g(z)$ em série de Taylor, isto é,

$$g(z) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n.$$

Mas, então, pela definição de $g(z)$ em termos de $f(z)$, podemos escrever:

$$(z - z_0)^p f(z) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} f(z) \quad &= \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^{n-p} \\ &= \quad \frac{b_0}{(z - z_0)^p} + \frac{b_1}{(z - z_0)^{p-1}} + \ldots + \frac{b_{p-1}}{z - z_0} + b_p + b_{p+1}(z - z_0) \\ & \quad\quad + b_{p+2}(z - z_0)^2 + b_{p+3}(z - z_0)^3 + \ldots \end{aligned}$$

Como, por hipótese, há um polo de grau p em z_0, temos

$$b_0 \neq 0.$$

Caso fosse zero, o polo teria ordem menor do que p. Vamos, para ficar tudo consistente, redefinir a notação dos coeficientes acima assim:

$$a_n \equiv b_{p+n},$$

para $n \in \mathbb{Z}$, com $n \geqslant -p$. Então, porque temos um polo de grau p em z_0, segue que

$$a_{-p} \neq 0$$

e

$$f(z) = \sum_{n=-p}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n .$$

Agora, olhando a função $g(z)$ acima, porque é analítica em $\mathcal{R}$, em C e inclusive em z_0, segue que

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{g(z')}{(z' - z_0)^{n+1}} dz'$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} a_n &= b_{p+n} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{g(z')}{(z' - z_0)^{p+n+1}} dz' \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{(z' - z_0)^p f(z')}{(z' - z_0)^{p+n+1}} dz', \end{aligned}$$

isto é,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z')}{(z' - z_0)^{n+1}} dz'.$$

Aqui estamos olhando para um polo em z_0 de ordem p. Mas e se apenas sabemos que temos uma singularidade em z_0 e não temos muito mais do que essa informação? Então, nossa série de Laurent, em geral, será escrita como

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n .$$

E precisamos ver se isso faz algum sentido em alguma circunstância. A parte analítica desta série é definida como

$$A \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

e a parte principal desta série é definida como

$$P \equiv \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n .$$

Como vimos em nossas aulas anteriores, sabemos que essas séries só convergem se tiverem raios de convergência. Só para rever o raciocínio anterior, vamos considerar a série P, da parte principal da série de Laurent de $f(z)$. Só para usar aqui uma notação análoga à que usamos antes, vamos reescrever P assim:

$$P = \sum_{k=1}^{\infty} c_k,$$

com

$$c_k \equiv a_{-k} (z - z_0)^{-k},$$

para algum $z \in \mathcal{R}$ diferente de z_0. Sendo N um número natural suficientemente grande, vamos supor que $|c_k|^{1/k}$ será sempre menor ou igual a um número real positivo $\lambda < 1$ sempre que $k \geqslant N$. Então, para $k \geqslant N$,

$$|c_k|^{1/k} \leqslant \lambda < 1.$$

Portanto,

$$|c_k| \leqslant \lambda^k$$

e, com isso,

$$\begin{aligned} \sum_{k=N}^{\infty} |c_k| &\leqslant \sum_{k=N}^{\infty} \lambda^k \\ &= \frac{\lambda^N}{1-\lambda} < \infty. \end{aligned}$$

Logo, o segredo para a série P convergir é que

$$|c_k|^{1/k} \leqslant \lambda$$

para algum número real positivo $\lambda < 1$ sempre que $k \geqslant N$. Assim, com a nossa definição de c_k acima, vemos que

$$\left| a_{-k} (z - z_0)^{-k} \right|^{1/k} \leqslant \lambda,$$

ou seja,

$$|a_{-k}|^{1/k} |z - z_0|^{-1} \leqslant \lambda,$$

para algum número real positivo $\lambda < 1$ sempre que $k \geqslant N$. Então, a condição que temos é que

$$|z - z_0| \geqslant \frac{|a_{-k}|^{1/k}}{\lambda},$$

para algum número real positivo $\lambda < 1$ sempre que $k \geqslant N$. Agora nós podemos imaginar k assumindo todos os valores maiores ou iguais a N e podemos ir calculando todos os respectivos valores de $|a_{-k}|^{1/k}$. É intuitivo que vai haver um desses valores que será o maior de todos. Então, pegamos esse valor supremo, que denotamos por

$$\sigma \equiv \sup\left\{|a_{-k}|^{1/k}\,; k \geqslant N\right\}$$

e P será convergente se

$$|z - z_0| \geqslant \frac{\sigma}{\lambda}.$$

Seja, portanto, R_P o raio de convergência dessa série definido por

$$R_P \equiv \frac{\sigma}{\lambda}.$$

Garantimos, portanto, que, caso haja, de fato, o tal número real positivo $\lambda < 1$ acima, a série vai convergir para todo z tal que

$$|z - z_0| > R_P$$

e estamos usando o sinal $>$ para garantir mesmo a convergência. Se ocorrer de R_P ser infinito, então não vai haver ponto z em uma região finita do plano complexo onde a série converge. Caso R_P seja um número finito (positivo), então a série converge para z que esteja distante de z_0 com distância maior do que R_P, com certeza.

Agora olhemos para a parte analítica da série, A. Repetindo um raciocínio análogo ao que acabamos de seguir e equivalente ao de aulas anteriores, vemos que teremos, nesse caso, que a série A vai convergir para pontos z tais que

$$|z - z_0| < R_A,$$

onde R_A é o raio de convergência da série A. Quando ocorrer que

$$R_P < R_A,$$

então a série de Laurent converge em uma região anular como a da faixa circular ilustrada na figura abaixo. Caso isso não aconteça, aí a série não converge em ponto algum. Eu não arriscaria dizer que converge para z distante $\bar{R}$ de z_0 quando $R_P = R_A \equiv \bar{R}$.

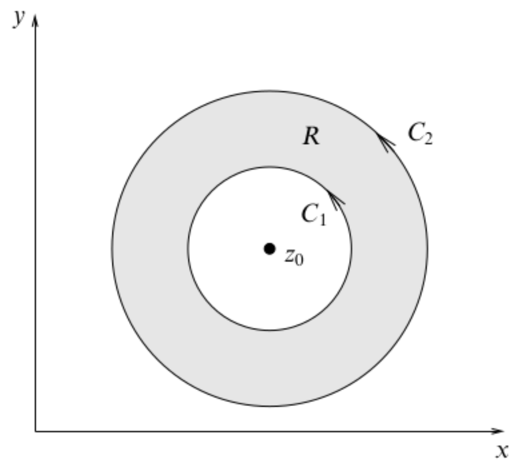


Figure 24.12 The region of convergence R for a Laurent series of $f(z)$ about a point $z = z_0$ where $f(z)$ has a singularity.

Agora vamos considerar apenas que temos uma função $f(z)$ que é analítica em uma faixa anular centrada em z_0, definida entre dois raios como na figura acima, isto é,

$$0 < R_1 < \quad |z - z_0| \quad < R_2.$$

Notemos que não é necessário especificarmos o que acontece em z_0 ou quando estamos fora da faixa anular especificada. Vamos tomar números reais positivos tão pequenos quanto queiramos, ε_1 e ε_2, e vamos definir duas novas circunferências, ambas centradas em z_0 e ambas tais que seus raios sejam r_1 e r_2 dados por:

$$r_1 \equiv R_1 + \varepsilon_1$$

e

$$r_2 \equiv R_2 - \varepsilon_2.$$

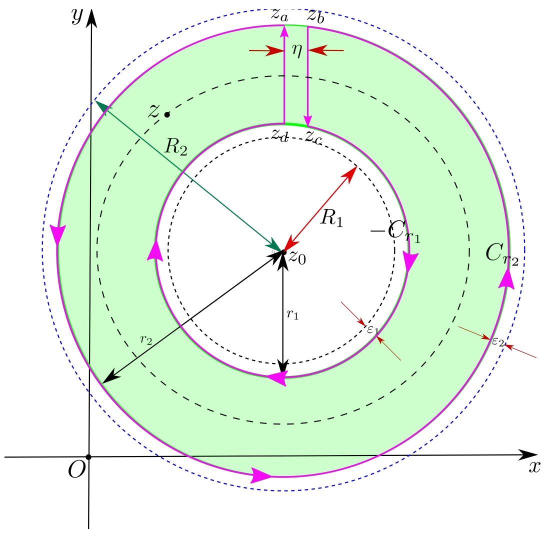
Logo, as duas circunferências estão dentro da faixa anular em que $f(z)$ é analítica.

Pelo teorema de Cauchy que demonstramos, se ficarmos restritos a pontos z na região da faixa anular em que $f(z)$ é analítica, então a integral de $f(z)$ sobre qualquer curva fechada totalmente contida na região da faixa anular será nula. Além disso, como vimos antes, usando uma tal curva fechada C podemos escrever:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz' \frac{f(z')}{z' - z},$$

para z dentro da região com fronteira externa dada por C, onde, por convenção, como já vimos em aulas anteriores, a circuitação é tomada no sentido anti-horário sobre C. Note que C não precisa ser circular, pode ser qualquer curva dentro da faixa anular em que $f(z)$ é analítica.

Consideremos agora a seguinte curva fechada C. A figura abaixo ilustra a geometria que estamos descrevendo.



Comecemos por $z_a = z_0 + ir_2$. Continuemos sobre a circunferência de raio r_2 no sentido anti-horário até quase completarmos o circuito, parando um pouco antes de z_a, isto é, vamos parar no ponto $z_b = z_0 + \eta + ir_2$, com $\eta \in \mathbb{R}$ e $\eta > 0$ tão pequeno quanto queiramos. Agora, vamos descer paralelamente ao eixo imaginário até o ponto $z_c = z_0 + \eta + ir_1$, que está sobre a circunferência de raio r_1. Deste ponto vamos agora continuar sobre a circunferência de raio r_1 no sentido horário, até, finalmente, chegarmos ao ponto da circunferência verticalmente abaixo do ponto em que iniciamos, ou seja, vamos parar no ponto $z_d = z_0 + ir_1$. Deste ponto, subamos verticalmente fechando toda a circuitação C, parando novamente sobre z_a. Como vimos em aulas anteriores, no limite em que fizermos $\eta \to 0^+$, obtemos:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz' \, \frac{f(z')}{z' - z} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{r_2}} dz' \, \frac{f(z')}{z' - z} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{r_1}} dz' \, \frac{f(z')}{z' - z}, \end{aligned}$$

com ambas as integrais agora no sentido anti-horário sobre C_{r_2} e C_{r_1}, onde a primeira é a circunferência completa de raio r_2 e a segunda é a circunferência completa de raio r_1.

Notemos agora que

$$\begin{aligned} \oint_{C_{r_2}} dz' \, \frac{f(z')}{z' - z} &= \oint_{C_{r_2}} dz' \, \frac{f(z')}{(z' - z_0) - (z - z_0)} \\ &= \oint_{C_{r_2}} dz' \, \frac{f(z')}{(z' - z_0)\left(1 - \frac{z - z_0}{z' - z_0}\right)}. \end{aligned}$$

Mas, como $|z' - z_0| > |z - z_0|$, segue que podemos escrever

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{z - z_0}{z' - z_0}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{z' - z_0}\right)^n.$$

Sendo assim,

$$\oint_{C_{r_2}} dz' \, \frac{f(z')}{z' - z} = \oint_{C_{r_2}} dz' \, \frac{f(z')}{(z' - z_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{z' - z_0}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\oint_{C_{r_2}} dz'\,\frac{f(z')}{(z'-z_0)^{n+1}}\right](z-z_0)^n.$$

Agora consideremos a outra integral:

$$\begin{aligned}
\oint_{C_{r_1}} dz'\,\frac{f(z')}{z'-z} &= -\oint_{C_{r_1}} dz'\,\frac{f(z')}{z-z'} \\
&= -\oint_{C_{r_1}} dz'\,\frac{f(z')}{(z-z_0)-(z'-z_0)} \\
&= -\oint_{C_{r_1}} dz'\,\frac{f(z')}{(z-z_0)\left(1-\frac{z'-z_0}{z-z_0}\right)}.
\end{aligned}$$

Mas, neste caso, vemos que $|z'-z_0| < |z-z_0|$ e, portanto, temos:

$$\frac{1}{\left(1-\frac{z'-z_0}{z-z_0}\right)} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z'-z_0}{z-z_0}\right)^k.$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
\oint_{C_{r_1}} dz'\,\frac{f(z')}{z'-z} &= -\oint_{C_{r_1}} dz'\,\frac{f(z')}{z-z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z'-z_0}{z-z_0}\right)^k \\
&= -\sum_{k=0}^{\infty}\left[\oint_{C_{r_1}} dz'\,f(z')\,(z'-z_0)^k\right]\frac{1}{(z-z_0)^{k+1}}.
\end{aligned}$$

Podemos reescrever este resultado fazendo a substituição em que

$$k = -1-n.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\oint_{C_{r_1}} dz'\,\frac{f(z')}{z'-z} &= -\sum_{n=-1}^{-\infty}\left[\oint_{C_{r_1}} dz'\,\frac{f(z')}{(z'-z_0)^{n+1}}\right](z-z_0)^n \\
&= -\sum_{n=-\infty}^{-1}\left[\oint_{C_{r_1}} dz'\,\frac{f(z')}{(z'-z_0)^{n+1}}\right](z-z_0)^n.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\oint_{C_{r_2}} dz'\,\frac{f(z')}{(z'-z_0)^{n+1}}\right](z-z_0)^n \\
&\quad +\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{-1}\left[\oint_{C_{r_1}} dz'\,\frac{f(z')}{(z'-z_0)^{n+1}}\right](z-z_0)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{r_2}} dz'\,\frac{f(z')}{(z'-z_0)^{n+1}}\right](z-z_0)^n \\
&\quad +\sum_{n=-\infty}^{-1}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{r_1}} dz'\,\frac{f(z')}{(z'-z_0)^{n+1}}\right](z-z_0)^n.
\end{aligned}$$

Sejam agora os coeficientes a_n definidos por:

$$a_n \equiv \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon_2 \to 0^+} \oint_{C_{r_2}} dz' \, \frac{f(z')}{(z' - z_0)^{n+1}},$$

para $n \geqslant 0$, e

$$a_n \equiv \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon_1 \to 0^+} \oint_{C_{r_1}} dz' \, \frac{f(z')}{(z' - z_0)^{n+1}},$$

para $n < 0$. Sendo assim, escrevemos:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n ,$$

ou seja,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n .$$

Vemos assim que se uma função $f(z)$ que for analítica em uma faixa anular centrada em um ponto z_0, não importando se há quaisquer singularidades fora desta faixa, mesmo sobre z_0, ainda assim a função $f(z)$ pode ser expandida, para z dentro do ânulo, como uma série de Laurent.

O livro-texto de Riley et al observa que podemos usar a série de Laurent para estabelecer a natureza do ponto z_0. Caso $f(z)$ seja analítica em z_0, então a parte principal da série de Laurent é nula. Além disso, pode acontecer que os coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$ sejam todos nulos também, sendo $a_{m>0} \neq 0$. Nesse caso podemos dizer que a função $f(z)$ tem um zero de ordem m em z_0, como vimos anteriormente.

Aí, tem o caso em que $f(z)$ não é analítica em z_0. Caso encontremos um inteiro positivo p tal que $a_{-p} \neq 0$ mas $a_{-p-k} = 0$ para todos os valores inteiros positivos de k, segue que a função $f(z)$ tem um polo de grau p em z_0. Também é importante notarmos que o coeficiente a_{-1}, não importando o valor de $p > 0$, é chamado de resíduo da função $f(z)$ no polo z_0.

Quando, no entanto, não é possível encontrarmos um limitante superior para o conjunto dos valores de $p > 0$ para os quais $a_{-p} \neq 0$, segue que a série não para em uma potência negativa finita e dizemos que z_0 é uma singularidade essencial.