## A fórmula integral de Cauchy

Se $f(z)$ é analítica em uma curva fechada $C$ e dentro da região cuja fronteira é a curva $C$, então, para um ponto $z_0$ dentro dessa região, vale a fórmula integral de Cauchy:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}dz.$$

Podemos olhar para uma pequena circunferência $C_\varepsilon$ de raio $\varepsilon$ centrada em $z_0$. Então, o integrando acima, isto é, $f(z)/(z - z_0)$, é uma função analítica tanto em $C$ como em $C_\varepsilon$ e entre essas duas curvas fechadas. Vamos usar $\theta$ como sendo o parâmetro da curva $C_\varepsilon$ assim:

$$z = z_0 + \varepsilon \exp(i\theta).$$

Então,

$$dz = i\varepsilon \exp(i\theta)\, d\theta$$

e

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}dz &= \oint_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{z - z_0}dz \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \varepsilon \exp(i\theta))}{z_0 + \varepsilon \exp(i\theta) - z_0} i\varepsilon \exp(i\theta)\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} f(z_0 + \varepsilon \exp(i\theta))\, i d\theta.
\end{aligned}$$

Como a função $f(z)$ é analítica em $z_0$, segue que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f(z_0 + \varepsilon \exp(i\theta)) = f(z_0),$$

não importando o valor de $\theta$. Com isso, vemos que

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}dz &= \int_0^{2\pi} f(z_0)\, i d\theta \\
&= f(z_0)\, i \int_0^{2\pi} d\theta \\
&= 2\pi i f(z_0),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}dz,$$

como queríamos demonstrar.

Vamos agora demonstrar a desigualdade de Cauchy.

►*Suppose that $f(z)$ is analytic inside and on a circle $C$ of radius $R$ centred on the point $z = z_0$. If $|f(z)| \leq M$ on the circle, where $M$ is some constant, show that*

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{Mn!}{R^n}. \tag{24.49}$$

Comecemos com a primeira derivada. Então,

$$\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta z} \left[ \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0 - \Delta z} dz - \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right] \\
&= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta z} \oint_C f(z) \left[ \frac{1}{z - z_0 - \Delta z} - \frac{1}{z - z_0} \right] dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta z} \oint_C f(z) \left[ \frac{z - z_0 - z + z_0 + \Delta z}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)} \right] dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\Delta z \to 0} \oint_C f(z) \frac{1}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)} dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz.
\end{aligned}$$

Repetindo $n$ vezes este procedimento, obtemos:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

Agora podemos escrever:

$$\begin{aligned}
\left| f^{(n)}(z_0) \right| &= \left| \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \right| \\
&\leqslant \frac{n!}{2\pi} \oint_C \left| \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \right| \\
&= \frac{n!}{2\pi} \oint_C \frac{|f(z)|}{|z - z_0|^{n+1}} |dz| \\
&\leqslant \frac{Mn!}{2\pi} \oint_C \frac{1}{|z - z_0|^{n+1}} |dz|.
\end{aligned}$$

Como $C$ é uma circunferência de raio $R$ centrada em $z_0$, segue que

$$\begin{aligned}
\left| f^{(n)}(z_0) \right| &\leqslant \frac{Mn!}{2\pi R^{n+1}} \oint_C |dz| \\
&= \frac{Mn!}{2\pi R^{n+1}} 2\pi R
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\left| f^{(n)}(z_0) \right| \leqslant \frac{Mn!}{R^n},$$

como queríamos demonstrar.

We may use Cauchy's inequality to prove *Liouville's theorem*, which states that if $f(z)$ is analytic and bounded for all $z$ then $f$ is a constant. Setting $n = 1$ in (24.49) and letting $R \to \infty$, we find $|f'(z_0)| = 0$ and hence $f'(z_0) = 0$. Since $f(z)$ is analytic for all $z$, we may take $z_0$ as any point in the $z$-plane and thus $f'(z) = 0$ for all $z$; this implies $f(z) =$ constant. Liouville's theorem may be used in turn to prove the *fundamental theorem of algebra* (see exercise 24.9).

## Séries de Taylor e de Laurent

Se $f(z)$ é analítica dentro e sobre uma circunferência $C$ centrada no ponto $z_0$ e $z$ está dentro da região englobada por $C$, então

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n .$$

Para demonstrar esse resultado, sabemos já que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z')}{z' - z} dz'.$$

Podemos escrever:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z' - z} &= \frac{1}{z' - z_0 + z_0 - z} \\ &= \frac{1}{(z' - z_0)\left(1 - \frac{z - z_0}{z' - z_0}\right)}. \end{aligned}$$

Como, por hipótese, $z$ está dentro da região englobada por $C$, segue que

$$|z - z_0| < |z' - z_0|,$$

pois $z'$ está sobre a circunferência $C$. E é por isso que precisamos sempre supor que $C$ é uma circunferência aqui, onde a série de Taylor converge para todos os pontos $z$ dentro da região englobada por $C$. Logo, não há problema algum em notar que

$$\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{z' - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z - z_0}{z' - z_0}\right)^n .$$

Para ver isso, basta notarmos que, sendo

$$\xi \equiv \frac{z - z_0}{z' - z_0}$$

e sabendo que

$$|\xi| < 1,$$

podemos escrever:

$$\begin{aligned}
(1-\xi)\sum_{n=0}^{\infty}\xi^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\xi^n - \xi\sum_{n=0}^{\infty}\xi^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\xi^n - \sum_{n=0}^{\infty}\xi^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\xi^n - \sum_{n=1}^{\infty}\xi^n \\
&= \left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\xi^n\right) - \sum_{n=1}^{\infty}\xi^n \\
&= 1+\left(\sum_{n=1}^{\infty}\xi^n - \sum_{n=1}^{\infty}\xi^n\right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\xi^n &= \frac{1}{1-\xi} \\
&= \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{z'-z_0}}.
\end{aligned}$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z')}{(z'-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{z'-z_0}\right)}dz' \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z')}{(z'-z_0)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{z'-z_0}\right)^n dz' \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z')}{(z'-z_0)^{n+1}}dz'\right](z-z_0)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n,
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.