

Integrais complexas (continuação)

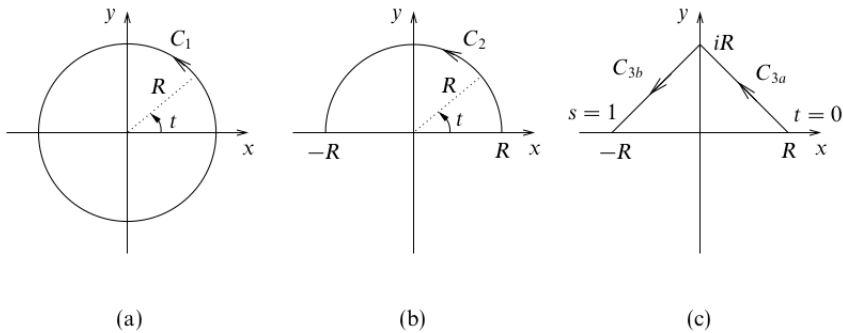


Figure 24.9 Different paths for an integral of $f(z) = z^{-1}$. See the text for details.

► Evaluate the complex integral of $f(z) = \operatorname{Re} z$ along the paths C_1 , C_2 and C_3 shown in figure 24.9.

Neste caso, temos, para C_1 , sendo

$$\begin{aligned} z &= R \exp(i\theta) \\ &= R \cos \theta + iR \operatorname{sen} \theta, \end{aligned}$$

vemos que

$$\operatorname{Re}(z) = R \cos \theta.$$

Então, sendo

$$dz = iR \exp(i\theta) d\theta$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \int_{C_1} dz \operatorname{Re}(z) &= \int_0^{2\pi} iR \exp(i\theta) R \cos \theta d\theta \\ &= iR^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta - R^2 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \theta \cos \theta d\theta \\ &= iR^2 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta - \frac{1}{2} R^2 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} 2\theta d\theta \\ &= iR^2 \pi. \end{aligned}$$

Ao longo de C_2 , temos:

$$\begin{aligned} \int_{C_2} dz \operatorname{Re}(z) &= \int_0^{\pi} iR \exp(i\theta) R \cos \theta d\theta \\ &= iR^2 \int_0^{\pi} \cos^2 \theta d\theta - R^2 \int_0^{\pi} \operatorname{sen} \theta \cos \theta d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= iR^2 \int_0^\pi \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta - \frac{1}{2} R^2 \int_0^\pi \sin 2\theta d\theta \\
&= iR^2 \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

E no caso de C_3 , obtemos os seguintes resultados para cada reta. Para C_{3a} usamos

$$z = (1 - \tau)R + i\tau R$$

e

$$\operatorname{Re}(z) = (1 - \tau)R,$$

dando

$$\begin{aligned}
\int_{C_{3a}} dz \operatorname{Re}(z) &= (-1 + i)R^2 \int_0^1 (1 - \tau) d\tau \\
&= (-1 + i)R^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{i-1}{2}R^2.
\end{aligned}$$

Para C_{3b} usamos

$$z = -\tau R + i(1 - \tau)R$$

e

$$\operatorname{Re}(z) = -\tau R.$$

Obtemos, então,

$$\begin{aligned}
\int_{C_{3b}} dz \operatorname{Re}(z) &= (1 + i)R^2 \int_0^1 \tau d\tau \\
&= (1 + i)R^2 \frac{1}{2} \\
&= \frac{1+i}{2}R^2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_{C_{3a}+C_{3b}} dz \operatorname{Re}(z) &= \frac{i-1}{2}R^2 + \frac{1+i}{2}R^2 \\
&= iR^2.
\end{aligned}$$

Um resultado importante para integrais complexas

Suponha que em uma curva C no plano complexo uma função $f(z)$ seja tal que

$$|f(z)| \leq M,$$

para todos os pontos de C . O valor M é um limitante superior de $|f(z)|$. Então, podemos ver que

$$\begin{aligned} \left| \int_C f(z) dz \right| &\leq \int_C |f(z)| |dz| \\ &\leq M \int_C |dz| \\ &= ML, \end{aligned}$$

onde

$$L \equiv \int_C |dz|$$

é o comprimento da curva C .

Teorema de Cauchy

A ideia é provar que se uma função $f(z)$ é analítica e $f'(z)$ é contínua em cada ponto de uma região \mathcal{R} do plano complexo e na fronteira C de \mathcal{R} então temos que

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

Consideremos, antes de mais nada, uma região circular cuja fronteira é uma circunferência C_ε de raio ε . Vamos supor que tomamos ε como sendo pequeno o suficiente para que $f(z)$ seja analítica dentro da região do plano complexo com a fronteira dada pela circunferência C_ε . Então, sobre a circunferência, centrada em z , queremos calcular

$$I_\varepsilon = \oint_{C_\varepsilon} f(z') dz'.$$

Como z' está sobre C_ε , podemos escrever

$$f(z') = f(z + \varepsilon \exp(i\theta)),$$

para ε suficientemente pequeno, com θ variando no intervalo $[0, 2\pi)$. Como a função $f(z)$ é, por hipótese, analítica em z , segue que existe uma bola aberta (ou disco aberto, no plano complexo) tal que podemos escolher ε dentro dessa bola aberta. Nesse caso, por ser analítica, a função pode ser expandida em torno de z . Assim, como

$$z = x + iy,$$

escrevendo

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

obtemos

$$\begin{aligned} f(z + \varepsilon \exp(i\theta)) &= u(x + \varepsilon \cos \theta, y + \varepsilon \sin \theta) + iv(x + \varepsilon \cos \theta, y + \varepsilon \sin \theta) \\ &\approx u(x, y) + \varepsilon \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \sin \theta \right] \\ &\quad + iv(x, y) + i\varepsilon \left[\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \sin \theta \right]. \end{aligned}$$

Mas, como $f(z)$ é analítica em z , podemos reescrever esse resultado assim:

$$\begin{aligned} f(z + \varepsilon \exp(i\theta)) &\approx f(z) + \varepsilon \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \operatorname{sen} \theta \right] \\ &\quad + i\varepsilon \left[-\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \cos \theta + \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \operatorname{sen} \theta \right] \\ &= f(z) + \varepsilon \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - i \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right] \exp(i\theta). \end{aligned}$$

Logo, usando uma parametrização em θ , escrevemos

$$dz' = i\varepsilon \exp(i\theta) d\theta$$

e

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &\approx f(z) \int_0^{2\pi} i\varepsilon \exp(i\theta) d\theta \\ &\quad + \varepsilon \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - i \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right] \int_0^{2\pi} \exp(i\theta) i\varepsilon \exp(i\theta) d\theta. \end{aligned}$$

No entanto,

$$\int_0^{2\pi} i\varepsilon \exp(i\theta) d\theta = 0$$

e

$$\int_0^{2\pi} \exp(i\theta) i\varepsilon \exp(i\theta) d\theta = 0,$$

resultando em

$$\oint_{C_\varepsilon} f(z') dz' \approx 0$$

para ε pequeno o bastante.

Agora podemos supor que a função é analítica em uma região finita e contígua do plano complexo. Então a função vai ter a integral nula em todas as pequenas bolinhas ou disquinhos em torno de cada z da região. E quando isso acontece, podemos estender tudo até a fronteira da região. Para ver isso, notemos o seguinte resultado.

Suponha que temos como cobrir aproximadamente uma região finita com pequenos disquinhos circulares, um encostando no outro. Cada vez que um disquinho tangencia o outro, dz_1 e um deles e dz_2 do outro são anti-paralelos, de forma que $dz_2 = -dz_1$. Então, quando dois disquinhos tangenciam um ou outro, é como se não houvesse integral em torno desse ponto tangente e aí é como se a integral pudesse contornar os dois disquinhos formando um contorno só. É uma aproximação, mas intuimos que deve ser assim e, nas beiradas do ponto, sempre podemos encaixar outros disquinhos menores estendendo ainda mais o contorno final externo. Cobrindo assim com uma infinidade de disquinhos tangenciando um ao outro, no final, só vai sobrar sem preencher o contorno final da região toda onde a integral é feita. Aí obtemos, na região finita dentro da qual a função $f(z)$ é analítica, o resultado de que

$$\oint_C f(z) dz = 0,$$

para qualquer região, com qualquer contorno C , não necessariamente uma circunferência. Esse resultado é o chamado teorema de Cauchy que aqui estamos demonstrando de forma intuitiva, mas que pode ser feito rigoroso usando o teorema de Stokes e que será proposto como exercício. Vamos, então, tomar como válido esse teorema por enquanto e notar outras propriedades.

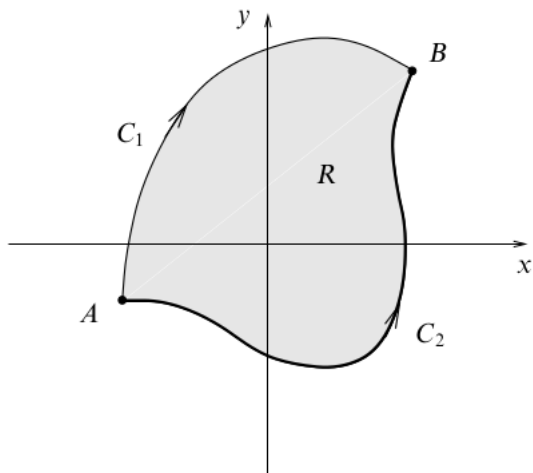


Figure 24.10 Two paths C_1 and C_2 enclosing a region R .

► Suppose two points A and B in the complex plane are joined by two different paths C_1 and C_2 . Show that if $f(z)$ is an analytic function on each path and in the region enclosed by the two paths, then the integral of $f(z)$ is the same along C_1 and C_2 .

Para mostrar isso basta usarmos o teorema de Cauchy:

$$\oint_C f(z) dz = 0,$$

que, neste caso, fica:

$$\oint_{C_2} f(z) dz + \oint_{-C_1} f(z) dz = 0,$$

onde $-C_1$ é a mesma curva acima, C_1 , mas percorrida no sentido inverso. No entanto, é evidente que, invertendo o sentido, dz troca de sinal e obtemos:

$$\oint_{-C_1} f(z) dz = -\oint_{C_1} f(z) dz.$$

Logo,

$$\oint_{C_2} f(z) dz - \oint_{C_1} f(z) dz = 0,$$

ou seja,

$$\oint_{C_2} f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz.$$

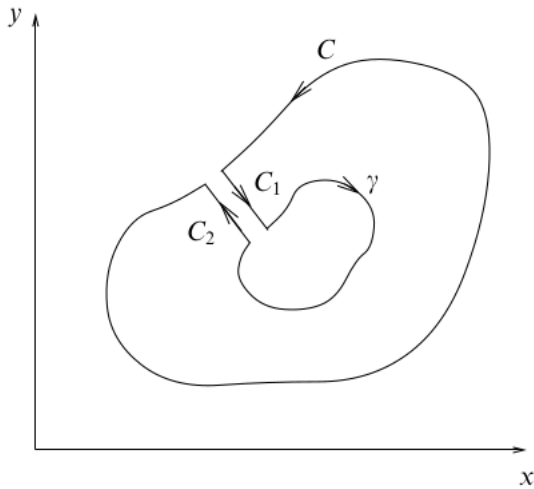


Figure 24.11 The contour used to prove the result (24.43).

► Consider two closed contours C and γ in the Argand diagram, γ being sufficiently small that it lies completely within C . Show that if the function $f(z)$ is analytic in the region between the two contours then

$$\oint_C f(z) dz = \oint_\gamma f(z) dz. \quad (24.43)$$

Novamente, podemos seguir os sentidos das curvas do desenho e escrever:

$$\oint_C f(z) dz + \oint_{C_1} f(z) dz + \oint_\gamma f(z) dz + \oint_{C_2} f(z) dz = 0,$$

isto é,

$$\oint_C f(z) dz + \oint_{C_1} f(z) dz + \oint_\gamma f(z) dz - \oint_{C_1} f(z) dz = 0,$$

já que, obviamente, no limite em que C_1 tende a ficar sobre C_2 , por percorrerem sentidos diferentes e os valores da função nesses pontos serem os mesmos, já que a função é analítica, segue que

$$\oint_{C_1} f(z) dz + \oint_{C_2} f(z) dz = 0.$$

Então,

$$\oint_C f(z) dz + \oint_\gamma f(z) dz = 0,$$

ou seja,

$$\oint_C f(z) dz = -\oint_\gamma f(z) dz.$$

Se, por outro lado, trocarmos

$$\gamma \rightarrow -\gamma,$$

obtemos:

$$\begin{aligned}\oint_C f(z) dz &= -\oint_{-\gamma} f(z) dz \\ &= \oint_{\gamma} f(z) dz,\end{aligned}$$

que é o que o livro-texto afirma, mas desenha o sentido de γ ao contrário. Nesta versão, a figura acima devia mostrar $-\gamma$ ao invés de γ e aqui, nesta última equação, γ percorre o sentido anti-horário e não o horário, como na figura acima.