Singularidades e zeros de funções complexas

Se uma função $f(z)$ é tal que

$$\lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0)^n f(z) \right] = a,$$

onde n é um inteiro positivo e a é um número complexo finito não nulo, então dizemos que a função $f(z)$ tem um polo de grau n em z_0. Polos são singularidades isoladas, pois a função é analítica em alguma vizinhança em torno do polo. Caso isso não aconteça, então z_0 não é chamado polo. Se não houver n finito, então z_0 é uma singularidade essencial.

►*Find the singularities of the functions*

$$\text{(i)}\ f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z}, \qquad \text{(ii)}\ f(z) = \tanh z.$$

Evidentemente, em (i) os polos são de ordem 1 e estão em $z_0 = \pm 1$. Já em (ii) precisamos ver quando temos o problema em que

$$\mathrm{tgh} z = \frac{\mathrm{senh} z}{\cosh z}$$

diverge. Então, nesse caso precisamos, por exemplo, encontrar os pontos onde

$$\cosh z = 0,$$

isto é,

$$\exp(z) + \exp(-z) = 0,$$

ou seja,

$$\exp(2z) = -1.$$

Escrevendo

$$z = x + iy,$$

vemos que estamos procurando x e y tais que

$$\exp(2x) \exp(i2y) = -1.$$

Tais pontos são

$$x = 0$$

e

$$2y = (2n+1)\pi,$$

isto é,

$$y = \frac{\pi}{2} + n\pi,$$

para $n = 0, 1, 2, \ldots$ Logo, os polos são dados por

$$z_0 = i\frac{\pi}{2} + in\pi,$$

para $n = 0, 1, 2, \ldots$ Para saber a ordem, basta vermos que

$$\begin{aligned}
\lim_{z \to i\frac{\pi}{2}+in\pi} \left[\left(z - i\frac{\pi}{2} - in\pi\right) \mathrm{tgh} z\right] &= \lim_{z \to i\frac{\pi}{2}+in\pi} \left[\left(z - i\frac{\pi}{2} - in\pi\right) \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{\exp(z) + \exp(-z)}\right] \\
&= \lim_{z \to i\frac{\pi}{2}+in\pi} \left[\left(z - i\frac{\pi}{2} - in\pi\right) \frac{\exp(2z) - 1}{\exp(2z) + 1}\right] \\
&= \lim_{z \to i\frac{\pi}{2}+in\pi} \left[\left(z - i\frac{\pi}{2} - in\pi\right) \frac{-2}{\exp(2z) + 1}\right]
\end{aligned}$$

e vemos que podemos usar o teorema de l'Hôpital para encotrar:

$$\begin{aligned}
\lim_{z \to i\frac{\pi}{2}+in\pi} \left[\left(z - i\frac{\pi}{2} - in\pi\right) \frac{-2}{\exp(2z) + 1}\right] &= \lim_{z \to i\frac{\pi}{2}+in\pi} \left[\frac{-2}{2\exp(2z)}\right] \\
&= 1
\end{aligned}$$

e, com isso, vemos que todos esses polos, com $n = 0, 1, 2, \ldots$, são de ordem 1.

►*Show that $f(z) = (\sin z)/z$ has a removable singularity at $z = 0$.*

Podemos escrever

$$z = \varepsilon \exp(i\theta)$$

e veremos que

$$f(z) = \frac{\exp[i\varepsilon \exp(i\theta)] - \exp[-i\varepsilon \exp(i\theta)]}{2i\varepsilon \exp(i\theta)}.$$

Quando $\varepsilon \to 0$, segue que podemos aproximar $f(z)$, para qualquer θ, assim:

$$\begin{aligned}
f(z) &\approx \frac{1 + i\varepsilon \exp(i\theta) - 1 + i\varepsilon \exp(i\theta)}{2i\varepsilon \exp(i\theta)} \\
&= \frac{\varepsilon \exp(i\theta)}{\varepsilon \exp(i\theta)} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{z\to 0} f(z) = 1,$$

independentemente da direção θ e isso mostra que $z=0$ é uma singularidade removível.

►*Find the behaviour at infinity of* (i) $f(z) = a + bz^{-2}$, (ii) $f(z) = z(1+z^2)$ *and* (iii) $f(z) = \exp z$.

Para ver o comportamento no infinito, trocamos z por $1/\xi$, com $\xi \in \mathbb{C}$ e vemos o que acontece em $\xi \to 0$. Assim, no caso (i), temos:

$$f\left(\frac{1}{\xi}\right) = a + b\xi^2$$

e vemos que esta função é analítica em $z=\infty$. No caso (ii), vemos que

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{\xi}\right) &= \frac{1}{\xi}\left(1+\frac{1}{\xi^2}\right) \\ &= \frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi^3}. \end{aligned}$$

Vemos, então, que esta função tem um polo de ordem 3 em $z=\infty$. Já no caso (iii), a função fica:

$$f\left(\frac{1}{\xi}\right) = \exp\left(\frac{1}{\xi}\right)$$

e, portanto, possui uma singularidade essencial em $z=\infty$.

Zero de ordem n

Dizemos que uma função tem um zero de ordem $n \in \mathbb{Z}$ em z_0 quando $n>0$ e existe uma função $g(z)$ tal que

$$g(z_0) \neq 0$$

e

$$f(z) = (z-z_0)^n g(z).$$

Integrais complexas

Para definir integrais complexas, basta que pensemos em um caminho no plano complexo de forma que

$$dz = dx + idy$$

e, parametrizando a curva C com algum parâmetro τ, fazemos

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{\tau_1,C}^{\tau_2} f(x,y)\left(\frac{dx}{d\tau}+i\frac{dy}{d\tau}\right)d\tau.$$

►*Evaluate the complex integral of $f(z)=z^{-1}$ along the circle $|z|=R$, starting and finishing at $z=R$.*

Aqui o parâmetro que podemos usar é meramente o ângulo θ do próprio número complexo

$$z = R\exp(i\theta),$$

que descreve toda a curva conforme θ varia de 0 a 2π. Com isso, então, vemos que

$$\begin{aligned}\int_C \frac{1}{z}dz &= \int_0^{2\pi}\frac{d[R\exp(i\theta)]}{R\exp(i\theta)}\\ &= \int_0^{2\pi}\frac{R\exp(i\theta)\,id\theta}{R\exp(i\theta)}\\ &= i\int_0^{2\pi}d\theta\\ &= 2\pi i.\end{aligned}$$

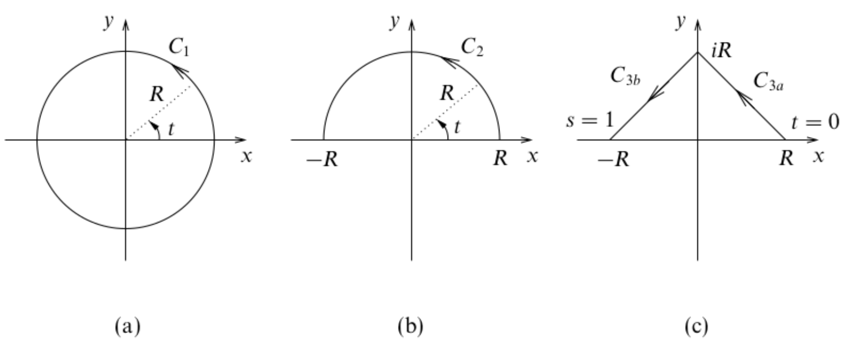

Figure 24.9 Different paths for an integral of $f(z)=z^{-1}$. See the text for details.

►*Evaluate the complex integral of $f(z)=z^{-1}$ along the following paths (see figure 24.9):*

(i) *the contour C_2 consisting of the semicircle $|z|=R$ in the half-plane $y\geq 0$,*

(ii) *the contour C_3 made up of the two straight lines C_{3a} and C_{3b}.*

Aqui, em (i) fazemos o mesmo que fizemos acima, mas agora com θ variando de 0 a π e o resultado será πi. Já no caso (ii), podemos parametrizar os caminhos usando retas. Para C_{3a} usamos

$$z = (1-\tau)R + i\tau R$$

e, assim,

$$\begin{aligned} dz &= -Rd\tau + iRd\tau \\ &= (-1+i)\, Rd\tau, \end{aligned}$$

com o parâmetro τ variando de 0 até 1. A integral neste trecho dá

$$\begin{aligned} \int_{c_{3a}} \frac{dz}{z} &= \int_0^1 (-1+i)\, Rd\tau \frac{1}{(1-\tau)\, R + i\tau R} \\ &= \int_0^1 (-1+i)\, d\tau \frac{1}{(1-\tau) + i\tau} \\ &= \int_0^1 (-1+i)\, d\tau \frac{1-\tau-i\tau}{(1-\tau)^2 + \tau^2} \\ &= \int_0^1 (-1+i)\, d\tau \frac{1-\tau-i\tau}{2\tau^2 - 2\tau + 1} \\ &= \int_0^1 (-1+i)\, d\tau \frac{1-(1+i)\,\tau}{2\tau^2 - 2\tau + 1} \\ &= \int_0^1 d\tau \frac{(-1+i) + 2\tau}{2\tau^2 - 2\tau + 1} \\ &= \int_0^1 d\tau \frac{2\tau - 1}{2\tau^2 - 2\tau + 1} + i \int_0^1 d\tau \frac{1}{2\tau^2 - 2\tau + 1}. \end{aligned}$$

Para C_{3b} usamos um parâmetro τ variando de 0 a 1 e escrevemos:

$$z = -\tau R + i\,(1-\tau)\, R.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} dz &= -Rd\tau - iRd\tau \\ &= -\,(1+i)\, Rd\tau. \end{aligned}$$

A integral neste trecho dá

$$\begin{aligned} \int_{c_{3b}} \frac{dz}{z} &= -\int_0^1 (1+i)\, Rd\tau \frac{1}{-\tau R + i\,(1-\tau)\, R} \\ &= -\int_0^1 (1+i)\, d\tau \frac{1}{-\tau + i\,(1-\tau)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 (1+i)\, d\tau \frac{1}{\tau + i(\tau-1)} \\
&= \int_0^1 (1+i)\, d\tau \frac{\tau - i(\tau-1)}{\tau^2 + (\tau-1)^2} \\
&= (1+i) \int_0^1 d\tau \frac{(1-i)\,\tau}{\tau^2 + (\tau-1)^2} \\
&\quad + (1+i)\, i \int_0^1 d\tau \frac{1}{\tau^2 + (\tau-1)^2} \\
&= \int_0^1 d\tau \frac{2\tau - 1}{2\tau^2 - 2\tau + 1} + i \int_0^1 d\tau \frac{1}{2\tau^2 - 2\tau + 1}.
\end{aligned}
$$

Com isso,

$$
\begin{aligned}
\int_{C_{3a}+C_{3b}} \frac{dz}{z} &= \int_0^1 d\tau \frac{2\tau - 1}{2\tau^2 - 2\tau + 1} + i \int_0^1 d\tau \frac{1}{2\tau^2 - 2\tau + 1}. \\
&\quad + \int_0^1 d\tau \frac{2\tau - 1}{2\tau^2 - 2\tau + 1} + i \int_0^1 d\tau \frac{1}{2\tau^2 - 2\tau + 1} \\
&= \int_0^1 d\tau \frac{4\tau - 2}{2\tau^2 - 2\tau + 1} + 2i \int_0^1 d\tau \frac{1}{2\tau^2 - 2\tau + 1} \\
&= \int_0^1 \frac{d\left(2\tau^2 - 2\tau + 1\right)}{2\tau^2 - 2\tau + 1} + 2i \int_0^1 d\tau \frac{1}{2\tau^2 - 2\tau + 1} \\
&= \ln\left(2\tau^2 - 2\tau + 1\right)\Big|_0^1 + 2i \int_0^1 d\tau \frac{1}{2\tau^2 - 2\tau + 1} \\
&= 2i \int_0^1 d\tau \frac{1}{2\tau^2 - 2\tau + 1}.
\end{aligned}
$$

Mas,

$$
\begin{aligned}
2\tau^2 - 2\tau + 1 &= 2\left(\tau^2 - \tau + \frac{1}{2}\right) \\
&= 2\left[\left(\tau - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right] \\
&= 2\left[\left(\tau - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right]
\end{aligned}
$$

e, portanto,

$$\int_{C_{3a}+C_{3b}} \frac{dz}{z} = i\int_0^1 d\tau \frac{1}{\left(\tau-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}.$$

Como, usando

$$\tau - \frac{1}{2} = x = a\mathrm{tg}\varphi,$$

podemos escrever

$$\begin{aligned}
\int dx \frac{1}{x^2+a^2} &= \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\mathrm{tg}\varphi\right)}{\mathrm{tg}^2\varphi+1} \\
&= \frac{1}{a}\int \cos^2\varphi d\left(\mathrm{tg}\varphi\right) \\
&= \frac{1}{a}\int d\varphi \\
&= \frac{1}{a}\varphi + C \\
&= \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C,
\end{aligned}$$

onde C é uma constante arbitrária. Sendo assim, escolhendo

$$x = \tau - \frac{1}{2}$$

e

$$a = \frac{1}{2},$$

obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_{C_{3a}+C_{3b}} \frac{dz}{z} &= i\int_0^1 d\left(\tau-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\left(\tau-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}} \\
&= i\int_{-1/2}^{1/2} dx \frac{1}{x^2+a^2} \\
&= \frac{i}{a}\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)\Bigg|_{-1/2}^{1/2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2i\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_{-1/2}^{1/2} \\
&= 2i\mathrm{arctg}\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right) - 2i\mathrm{arctg}\left(\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right) \\
&= 2i\mathrm{arctg}\,(1) - 2i\mathrm{arctg}\,(-1) \\
&= 2i\frac{\pi}{4} - 2i\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\
&= i\pi.
\end{aligned}
$$