Funções multivaloradas e cortes de ramificação

Quando extraímos a raiz quadrada, por exemplo, de um número complexo, há duas raízes. Então, a função fica complicada, por exemplo

$$f(z) = z^{1/2}.$$

Se tomamos

$$z = |z| \exp(i\theta),$$

então fica fácil ver a ambiguidade quando calculamos $f(z)$ ao longo de um caminho que passa pelo mesmo ponto mais tarde, no plano complexo, pois

$$f(z) = \sqrt{|z|} \exp\left(i\frac{\theta}{2}\right).$$

Assim, ao darmos uma volta na origem, ao sairmos, por exemplo, do ponto $z = 1$ e, englobando a origem, chegarmos novamente no ponto $z = 1$, teremos saído de um valor $f(1) = 1$ e chegado no mesmo ponto $z = 1$, mas, tendo viajado continuamente, agora que $\theta = 2\pi$, a função não mais tem o mesmo valor, mas agora vale $f(z) = -1$, já que $\exp(i2\pi/2) = -1$. Já se não englobamos a origem, nesse caso a função nunca dá uma volta de 2π em sua trajetória e, portanto, não assume dois valores no mesmo ponto por onde já passou, como pode ser visto nas figuras abaixo. Entretanto, se quisermos incluir a origem, podemos ainda assim definir uma função que não tem mais do que um valor para cada ponto de seu domínio se, por exemplo, eliminarmos o semi-eixo x positivo. Então, precisamos, quando analisarmos caminhos no espaço complexo, definir exatamente o domínio da região onde uma função multivalorada passa a ser, de fato, uma função no sentido usual da definição que normalmente adotamos para funções.

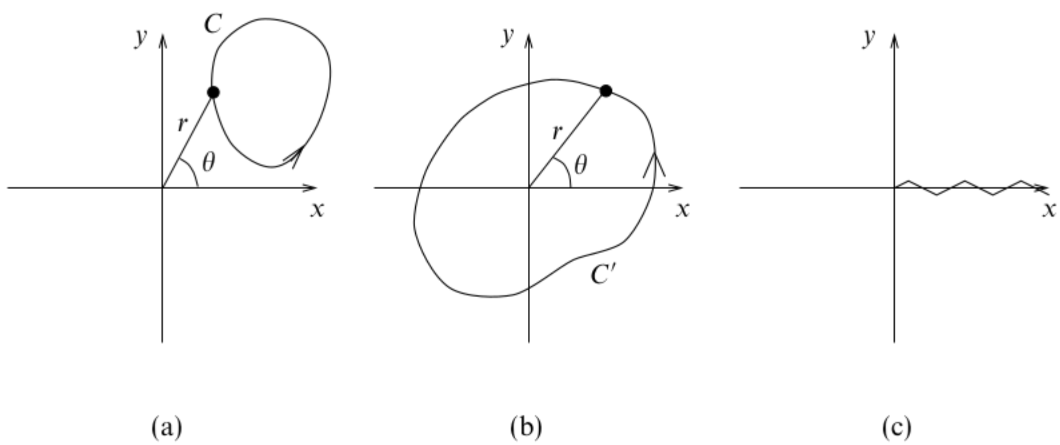

Figure 24.1 (a) A closed contour not enclosing the origin; (b) a closed contour enclosing the origin; (c) a possible branch cut for $f(z) = z^{1/2}$.

►*Find the branch points of $f(z) = \sqrt{z^2 + 1}$, and hence sketch suitable arrangements of branch cuts.*

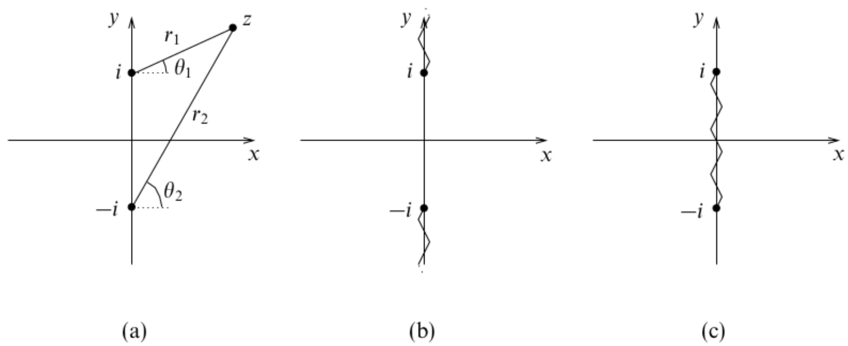

Figure 24.2 (a) Coordinates used in the analysis of the branch points of $f(z) = (z^2+1)^{1/2}$; (b) one possible arrangement of branch cuts; (c) another possible branch cut, which is finite.

Neste caso, vemos que temos

$$\begin{aligned} f(z) &= \sqrt{z^2+1} \\ &= \sqrt{(z+i)(z-i)} \\ &= \sqrt{z+i}\sqrt{z-i}. \end{aligned}$$

Podemos escrever:

$$z - i = |z-i| \exp(i\theta_1)$$

e

$$z + i = |z+i| \exp(i\theta_2).$$

Então,

$$f(z) = \sqrt{|z+i|\,|z-i|} \exp\left(i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right).$$

Vemos que se fizermos um caminho que engloba um dos pontos $\pm i$ a função passa por pontos novamente mas assume neles valores diferentes do que antes de ter englobado o referido ponto de ramificação em sua trajetória contínua no plano complexo. A figura acima mostra os possíveis cortes de ramificação que podemos usar para evitar que um caminho possa incluir uma volta que engloba um dos pontos de ramificação, isto é, $\pm i$.