Digressão: uma brevíssima revisão sobre séries de potências

1. Uma série de potências

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

converge no ponto x se o limite

$$\lim_{M\to\infty} \sum_{n=0}^{M} a_n (x - x_0)^n$$

existe para esse ponto x.

2. Uma série de potências

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

converge absolutamente no ponto x se a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n (x - x_0)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \, |x - x_0|^n$$

converge. Se uma série converge absolutamente, então a série converge. A recíproca não é necessariamente válida.

3. Teste da razão: se $a_n \neq 0$ e se, para um valor fixo de x,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} (x - x_0)^{n+1}}{a_n (x - x_0)^n} \right| &= |x - x_0| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \\ &= |x - x_0| \, L, \end{aligned}$$

então a série de potências converve absolutamente para o valor fixo x se

$$|x - x_0| \, L < 1$$

e diverge se

$$|x - x_0| \, L > 1.$$

Caso

$$|x - x_0| \, L = 1,$$

então o teste é inconclusivo.

Séries de potências em uma variável complexa

Um teste muito interessante para ver se uma série de potências converge é o teste da raiz. Dada uma série,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$

vamos supor que pegamos $|a_n|^{1/n}$ para n bem grande. Suponhamos que esse número seja menor ou igual do que algum número real postivo $\lambda < 1$ para $n \geqslant N$, com N um número natural suficientemente grande. Então, temos:

$$|a_n|^{1/n} \leqslant \lambda < 1.$$

Logo,

$$|a_n| \leqslant \lambda^n,$$

implicando que

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| \leqslant \sum_{n=N}^{\infty} \lambda^n < \infty,$$

pois $\lambda < 1$ por hipótese. Para vermos que $\sum_{n=N}^{\infty} \lambda^n$ converge, basta notarmos o seguinte:

$$\begin{aligned} S_N^{M>N} &\equiv \sum_{n=N}^{M} \lambda^n \\ &= \lambda^N + \lambda^{N+1} + \ldots + \lambda^M. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} (1-\lambda)\, S_N^{M>N} &= (1-\lambda)\left(\lambda^N + \lambda^{N+1} + \ldots + \lambda^M\right) \\ &= \lambda^N + \lambda^{N+1} + \lambda^{N+2} + \ldots + \lambda^M \\ &\quad -\lambda^{N+1} - \lambda^{N+2} - \ldots - \lambda^M - \lambda^{M+1} \\ &= \lambda^N - \lambda^{M+1}, \end{aligned}$$

isto é,

$$S_N^{M>N} = \frac{\lambda^N - \lambda^{M+1}}{1-\lambda}.$$

Logo,

$$\lim_{M\to\infty} S_N^{M>N} = \frac{\lambda^N}{1-\lambda} < \infty.$$

Assim, a série y é absolutamente convergente, já que o módulo de a_n, para $n > N$, é sempre menor do que λ^n e, pelo teste da comparação, como a série em λ^n, como acabamos de ver, converge, então a série y converge absolutamente.

Logo, se $|a_n|^{1/n}$ for menor ou igual do que algum número real postivo $\lambda < 1$ para $n \geqslant N$, isso será suficiente para a série convergir absolutamente. Vejamos que também é necessário que isso aconteça para a série convergir. Vamos supor que a série converge e, no entanto, para $n \geqslant N$, para algum inteiro $N > 0$ suficientemente grande, $|a_n|^{1/n} \geqslant \lambda > 1$. Nesse caso, obviamente,

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| \quad \geqslant \quad \sum_{n=N}^{\infty} \lambda^n \to \infty.$$

Logo, se isso acontecer, a série original,

$$y \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$

diverge absolutamente. No máximo, ela só pode ser condicionalmente convergente, mas aí nós rejeitamos aqui, neste curso, porque rearranjando a maneira com que os termos da série são somados, o resultado dessa nova soma pode dar qualquer coisa, segundo o teorema de Riemann sobre séries. Com essa ressalva feita, podemos dizer que é também necessário que tenhamos $|a_n|^{1/n}$ menor ou igual do que algum número real postivo $\lambda < 1$, para $n \geqslant N$, para que a série convirja.

O raio de convergência é aquele em que uma série

$$S(x) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

converge. Para poder aplicar nosso teste, precisamos tomar

$$a_n \quad = \quad b_n x^n.$$

Aí precisamos encontrar o maior valor de $|x|$ para o qual nossa série ainda é convergente. Então, para convergir, é necessário que haja um λ real positivo tal que

$$|a_n|^{1/n} \quad \leqslant \quad \lambda < 1,$$

isto é,

$$|b_n x^n| \quad \leqslant \quad \lambda^n,$$

para $n \geqslant N$, para um natural N suficientemente grande. Como $\lambda < 1$, segue que

$$|b_n x^n| \quad < \quad 1$$

e

$$|x^n| \quad < \quad \frac{1}{|b_n|},$$

ou seja,

$$|x| \quad < \quad \frac{1}{|b_n|^{1/n}},$$

quando $n \to \infty$. Então, podemos definir o raio de convergência R como sendo dado pela fórmula:

$$\frac{1}{R} \quad \equiv \quad \lim_{n\to\infty} |b_n|^{1/n}.$$

►*Find the parts of the z-plane for which the following series are convergent:*

$$\text{(i)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad \text{(ii)} \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n, \qquad \text{(iii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}.$$

(i) Neste caso,

$$b_n = \frac{1}{n!}$$

e, portanto,

$$|b_n|^{1/n} = \frac{1}{(n!)^{1/n}}.$$

Existe a aproximação de Stirling, que é a seguinte:

$$\ln n! \approx n \ln n - n,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} n! &\approx \exp(n \ln n - n) \\ &= \exp(\ln n^n) \exp(-n) \\ &= \frac{n^n}{\exp(n)}, \end{aligned}$$

caso n seja grande o suficiente. Para justificar intuitivamente a aproximação de Stirling, podemos pensar que quando n é muito, muito grande, a diferança entre um n e o seguinte, ou seja, 1, é muito menor do que n e, portanto, é como se estivéssemos variando n continuamente conforme n varia aumentando de 1 em 1. Com isso, vemos que:

$$\begin{aligned} \ln n! &= \ln [n(n-1)(n-2)\dots 1] \\ &= \sum_{k=1}^{n} \ln k. \end{aligned}$$

Mas, supondo variação contínua de k com $dk = 1$, podemos aproximar:

$$\begin{aligned} \ln n! &\approx \int_1^n dk \, \ln k \\ &= k \ln k - k|_1^n \\ &= n \ln n - n + 1 \\ &\approx n \ln n - n, \end{aligned}$$

quando, como por hipótese, n é grande o suficiente. Para verificar o resultado da integral, basta que façamos a derivada dele:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dk}(k \ln k - k) &= \ln k + k\frac{1}{k} - 1 \\ &= \ln k, \end{aligned}$$

como deve ser. Assim, voltando à análise de nossa série,

$$\begin{aligned}
\ln\left(|b_n|^{1/n}\right) &= \ln\left[\frac{1}{(n!)^{1/n}}\right] \\
&= -\frac{1}{n}\ln n! \\
&\approx -\frac{1}{n}(n\ln n - n) \\
&= -\ln n + 1 \\
&\approx -\ln n \\
&= \ln\frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$|b_n|^{1/n} \approx \frac{1}{n}$$

e, portanto,

$$\lim_{n\to\infty} |b_n|^{1/n} = 0.$$

Sendo assim, o raio de convergência neste caso é todo o plano complexo.

(ii) Neste caso,

$$b_n = n!$$

e, portanto,

$$|b_n|^{1/n} = (n!)^{1/n}.$$

Novamente, para n grande o bastante,

$$\begin{aligned}
\ln|b_n|^{1/n} &= \ln(n!)^{1/n} \\
&= \frac{1}{n}\ln n! \\
&\approx \frac{1}{n}(n\ln n - n) \\
&= \ln n - 1 \\
&\approx \ln n
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$|b_n|^{1/n} \approx n.$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} |b_n|^{1/n} = \infty.$$

Então, neste caso, a série é divergente, exceto em $z = 0$, com raio de convergência

$$R = 0.$$

(iii) Neste caso,

$$b_n = \frac{1}{n}$$

e, portanto,

$$|b_n|^{1/n} = \frac{1}{(n)^{1/n}}.$$

Logo,

$$\ln |b_n|^{1/n} = -\frac{1}{n} \ln n.$$

Com isso,

$$|b_n|^{1/n} = \exp\left(-\frac{1}{n} \ln n\right)$$

e, como a exponencial é uma função contínua, bem comportada e tudo o mais,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} |b_n|^{1/n} &= \lim_{n\to\infty} \exp\left(-\frac{1}{n} \ln n\right) \\ &= \exp\left[-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} \ln n\right)\right]. \end{aligned}$$

Neste caso, podemos usar o teorema de L'Hôpital para ver que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} \ln n\right) &= \frac{\frac{1}{n}}{1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Com isso, vemos que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} |b_n|^{1/n} &= \exp(0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

e, assim, o raio de convergência neste caso é dado por

$$R = 1,$$

ou seja, a série converge absolutamente se

$$|z| < 1.$$

Algumas funções elementares

►*Show that* $\exp z_1 \exp z_2 = \exp(z_1 + z_2)$.

Este é fácil, já sabemos que se

$$z_1 = x_1 + iy_1$$

e

$$z_2 = x_2 + iy_2,$$

então,

$$\begin{aligned}
\exp(z_1)\exp(z_2) &= \exp(x_1+x_2)(\cos y_1 + i\mathrm{sen} y_1)(\cos y_2 + i\mathrm{sen} y_2) \\
&= \exp(x_1+x_2) \\
&\quad \times (\cos y_1 \cos y_2 - \mathrm{sen} y_1 \mathrm{sen} y_2 + i\mathrm{sen} y_1 \cos y_2 + i\mathrm{sen} y_2 \cos y_1) \\
&= \exp(x_1+x_2)[\cos(y_1+y_2) + i\mathrm{sen}(y_1+y_2)] \\
&= \exp(x_1+x_2)\exp[i(y_1+y_2)] \\
&= \exp(x_1+x_2+iy_1+iy_2) \\
&= \exp(z_1+z_2).
\end{aligned}$$

►*Show that there are exactly n distinct nth roots of t.*

Este também é fácil, pois nós já sabemos que

$$\begin{aligned}
t &= \rho\exp(i\theta) \\
&= \rho\exp(i\theta + 2\pi ik),
\end{aligned}$$

com $k \in \mathbb{Z}$. Então, já sabemos que teremos

$$t_k \equiv \rho^{1/n}\exp\left(i\frac{\theta}{n} + 2\pi i\frac{k}{n}\right),$$

com $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, sendo as raízes de t, já que

$$\begin{aligned}
t_k^n &= \rho\exp(i\theta + 2\pi ik) \\
&= \rho\exp(i\theta) \\
&= t.
\end{aligned}$$