Variáveis complexas

Vamos agora seguir o livro-texto de Riley et al.

Funções de uma variável complexa

Vamos tomar um ponto no plano complexo com coordenadas correspondentes do plano xy dadas por x e y. O número no plano complexo que corresponde ao ponto (x, y) é, então,

$$z = x + iy.$$

Uma função complexa, $f(z)$, calculada no ponto z do plano complexo e dando um valor complexo, isto é,

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C},$$

é dada por

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

onde

$$u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}.$$

Dizemos que a função $f(z)$ é diferenciável ou analítica no ponto z se o seguinte limite existe:

$$f'(z) \equiv \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Para este limite existir, então Δz pode se aproximar de zero através de qualquer caminho no plano complexo e $f'(z)$ deve ter um valor finito que é sempre o mesmo, não importa como fazemos $\Delta z \rightarrow 0$.

►*Show that the function $f(z) = x^2 - y^2 + i2xy$ is differentiable for all values of z.*

Então, fazemos

$$\Delta z = \Delta x + i\Delta y.$$

Logo,

$$\begin{aligned} z + \Delta z &= (x + iy) + (\Delta x + i\Delta y) \\ &= (x + \Delta x) + i(y + \Delta y). \end{aligned}$$

Assim, como

$$f(z) = x^2 - y^2 + i2xy,$$

então,

$$\begin{aligned} f(z + \Delta z) &= (x + \Delta x)^2 - (y + \Delta y)^2 + i2(x + \Delta x)(y + \Delta y) \\ &= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - y^2 - 2y\Delta y - (\Delta y)^2 \\ &\quad + i2(xy + x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f(z+\Delta z)-f(z) &= 2x\Delta x+(\Delta x)^2-2y\Delta y-(\Delta y)^2 \\ &\quad +i2(x\Delta y+y\Delta x+\Delta x\Delta y) \end{aligned}$$

e, com isso,

$$\begin{aligned} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} &= \frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2-2y\Delta y-(\Delta y)^2}{\Delta x+i\Delta y} \\ &\quad +\frac{i2(x\Delta y+y\Delta x+\Delta x\Delta y)}{\Delta x+i\Delta y} \\ &= \frac{2x(\Delta x+i\Delta y)}{\Delta x+i\Delta y}+\frac{-2y\Delta y+2iy\Delta x}{\Delta x+i\Delta y} \\ &\quad +\frac{(\Delta x)^2-(\Delta y)^2}{\Delta x+i\Delta y}+\frac{i2(\Delta x\Delta y)}{\Delta x+i\Delta y}, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} &= 2x+2iy\frac{i\Delta y+\Delta x}{\Delta x+i\Delta y} \\ &\quad +\frac{(\Delta x)^2-(\Delta y)^2}{\Delta x+i\Delta y}+\frac{i2(\Delta x\Delta y)}{\Delta x+i\Delta y}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} &= 2x+2iy \\ &\quad +\frac{(\Delta x)^2+i2(\Delta x\Delta y)-(\Delta y)^2}{\Delta x+i\Delta y}, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} &= 2x+2iy \\ &\quad +\frac{(\Delta x+i\Delta y)^2}{\Delta x+i\Delta y}, \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = 2z+\Delta z,$$

que, no limite, dá:

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = 2z,$$

independentemente de como fazemos Δz tender a zero.

►*Show that the function $f(z) = 2y + ix$ is not differentiable anywhere in the complex plane.*

De novo, nós procedemos como anteriormente e fazemos o limite:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{2(y+\Delta y)+i(x+\Delta x)-2y-ix}{\Delta x+i\Delta y}\\ &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{2\Delta y+i\Delta x}{\Delta x+i\Delta y}.\end{aligned}$$

Se fizermos, por exemplo, um caminho em que Δz tende a zero sempre sobre o eixo x, vemos que

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{2\Delta y+i\Delta x}{\Delta x+i\Delta y} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{i\Delta x}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0} i\\ &= i.\end{aligned}$$

Se agora fizermos $\Delta z\to 0$ sempre sobre o eixo y, obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{2\Delta y+i\Delta x}{\Delta x+i\Delta y} &= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{2\Delta y}{i\Delta y}\\ &= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{2}{i}\\ &= -2i.\end{aligned}$$

Como por caminhos diferentes o mesmo limite dá diferentes resultados, segue que o limite, então, não existe e, assim, $f(z)$ não é analítica para ponto algum sobre o plano complexo, já que os limites acima serão diferentes em todos os pontos do plano complexo.

►*Show that the function $f(z) = 1/(1-z)$ is analytic everywhere except at $z = 1$.*

Novamente, fazemos o limite da definição:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\left[\frac{1}{1-(x+\Delta x)-i(y+\Delta y)}-\frac{1}{1-x-iy}\right]\\ &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\frac{1-x-iy-[1-(x+\Delta x)-i(y+\Delta y)]}{[1-(x+\Delta x)-i(y+\Delta y)](1-x-iy)}\\ &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\frac{-(-\Delta x-i\Delta y)}{[(1-x-iy-\Delta x-i\Delta y)](1-x-iy)}\\ &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\frac{\Delta z}{(1-z)(1-z-\Delta z)}\\ &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{(1-z)(1-z-\Delta z)}\\ &= \frac{1}{(1-z)^2},\end{aligned}$$

independentemente de como fazemos Δz tender a zero, mas que só vai ser finito se $z\neq 1$. Logo, a função $f(z)$ é analítica em todo ponto do plano complexo com exceção do ponto $z = 1$.

As relações de Cauchy & Riemann

Uma função é analítica no ponto $z = x + iy$ "se" ($\Leftarrow$) e "somente se" ($\Rightarrow$) ("se e somente se" ($\Longleftrightarrow$)) as seguintes relações valerem:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y},$$

onde, conforme já vimos, escrevemos

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y),$$

com

$$u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}.$$

Para demonstrar isso, vamos primeiro supor que a função é analítica e mostrar que essa hipótese implica a validade das relações de Cauchy & Riemann. Seja, então, um incremento Δz dado e que por enquanto é arbitrário. Dada a função

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y),$$

o incremento do valor desta função, dado

$$\Delta z = \Delta x + i\Delta y,$$

é dado por

$$\begin{aligned} f(z+\Delta z) - f(z) &= u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) \\ &\quad + iv(x+\Delta x, y+\Delta y) - iv(x,y). \end{aligned}$$

Então, naturalmente,

$$\begin{aligned} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y)}{\Delta x + i\Delta y} \\ &\quad + \frac{iv(x+\Delta x, y+\Delta y) - iv(x,y)}{\Delta x + i\Delta y}. \end{aligned}$$

Vamos escolher um caminho em que $\Delta y = 0$. Nesse caso,

$$\begin{aligned} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} \\ &\quad + i\frac{v(x+\Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Como a função $f\left(z\right)$, por hipótese, é analítica em z, segue que este limite existe:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f\left(z+\Delta z\right)-f\left(z\right)}{\Delta z} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u\left(x+\Delta x,y\right)-u\left(x,y\right)}{\Delta x}\\ &\quad +i\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v\left(x+\Delta x,y\right)-v\left(x,y\right)}{\Delta x}\\ &= \frac{\partial u\left(x,y\right)}{\partial x}+i\frac{\partial v\left(x,y\right)}{\partial x}.\end{aligned}$$

Se, ao invés, tomarmos um caminho em que $\Delta x=0$, segue que agora este limite também existe:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f\left(z+\Delta z\right)-f\left(z\right)}{\Delta z} &= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{u\left(x,y+\Delta y\right)-u\left(x,y\right)}{i\Delta y}\\ &\quad +\lim_{\Delta y\to 0}\frac{iv\left(x,y+\Delta y\right)-iv\left(x,y\right)}{i\Delta y}\\ &= -i\frac{\partial u\left(x,y\right)}{\partial y}+\frac{\partial v\left(x,y\right)}{\partial y}.\end{aligned}$$

Como a função $f\left(z\right)$ é analítica em z por hipótese, os dois limites por caminhos diferentes que acabamos de calcular devem ser iguais e, portanto,

$$\frac{\partial u\left(x,y\right)}{\partial x}+i\frac{\partial v\left(x,y\right)}{\partial x} = -i\frac{\partial u\left(x,y\right)}{\partial y}+\frac{\partial v\left(x,y\right)}{\partial y},$$

isto é,

$$\frac{\partial u\left(x,y\right)}{\partial x} = \frac{\partial v\left(x,y\right)}{\partial y}$$

e

$$\frac{\partial v\left(x,y\right)}{\partial x} = -\frac{\partial u\left(x,y\right)}{\partial y},$$

como queríamos demonstrar.

A demonstração recíproca da que acabamos de fazer fica mais difícil. Então, aqui, embora seja muito intuitivo o argumento seguinte, não é rigoroso o suficiente para ser considerado uma demonstração matemática. No entanto, vamos apresentar esse argumento porque vai servir muito bem aos nossos propósitos neste curso introdutório. Suponhamos que, de fato, temos uma função

$$f\left(z\right) = u\left(x,y\right)+iv\left(x,y\right)$$

e que as funções $u\left(x,y\right)$ e $v\left(x,y\right)$ satisfazem as condições de Cauchy & Riemann, ou seja,

$$\frac{\partial u\left(x,y\right)}{\partial x} = \frac{\partial v\left(x,y\right)}{\partial y}$$

e

$$\frac{\partial v\left(x,y\right)}{\partial x} = -\frac{\partial u\left(x,y\right)}{\partial y}.$$

Então, a primeira observação é que estas derivadas parciais existem. Logo, dado um incremento suficientemente pequeno,

$$\Delta z = \Delta x + i\Delta y,$$

podemos aproximar:

$$u(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx u(x,y) + \Delta x \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$$

e

$$v(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx v(x,y) + \Delta x \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}.$$

O sinal $\approx$ aproxima-se de uma igualdade, $=$, para Δx e Δy suficientemente pequenos.

Vamos considerar uma curva parametrizada com um parâmetro τ, de forma que agora teremos

$$x = x(\tau)$$

e

$$y = y(\tau).$$

Sejam, portanto,

$$\Delta x = x(\tau + \Delta\tau) - x(\tau)$$

e

$$\Delta y = y(\tau + \Delta\tau) - y(\tau),$$

para um incremento arbitrário $\Delta\tau$. Esta curva que escolhemos é completamente arbitrária. Então, para $\Delta\tau$ suficientemente pequeno, podemos aproximar:

$$\Delta x \approx \frac{dx}{d\tau}\Delta\tau$$

e

$$\Delta y \approx \frac{dy}{d\tau}\Delta\tau.$$

Veja que, com esta parametrização, usando uma curva arbitrária, fazer o limite em que $\Delta z \to 0$ é equivalente a fazer o limite em que $\Delta\tau \to 0$.

Podemos reescrever as relações acima, isto é,

$$u(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx u(x,y) + \Delta x \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$$

e

$$v(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx v(x,y) + \Delta x \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial v(x,y)}{\partial y},$$

agora em termos de nossa curva arbitrária assim:

$$u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) \approx \frac{dx}{d\tau}\Delta\tau\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \frac{dy}{d\tau}\Delta\tau\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$$

e

$$v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y) \approx \frac{dx}{d\tau}\Delta\tau\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} + \frac{dy}{d\tau}\Delta\tau\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}.$$

Veja que, neste caso, podemos reescrever o incremento Δz como:

$$\begin{aligned}\Delta z &= \Delta x + i\Delta y \\ &\approx \frac{dx}{d\tau}\Delta\tau + i\frac{dy}{d\tau}\Delta\tau.\end{aligned}$$

Logo, como

$$\begin{aligned}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} &= \frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y)}{\Delta x + i\Delta y} \\ &\quad + \frac{iv(x+\Delta x, y+\Delta y) - iv(x,y)}{\Delta x + i\Delta y}.\end{aligned}$$

temos agora a seguinte reparametrização desse quociente:

$$\begin{aligned}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} &\approx \frac{\frac{dx}{d\tau}\Delta\tau\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \frac{dy}{d\tau}\Delta\tau\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}}{\frac{dx}{d\tau}\Delta\tau + i\frac{dy}{d\tau}\Delta\tau} \\ &\quad + i\frac{\frac{dx}{d\tau}\Delta\tau\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} + \frac{dy}{d\tau}\Delta\tau\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}}{\frac{dx}{d\tau}\Delta\tau + i\frac{dy}{d\tau}\Delta\tau} \\ &= \frac{\frac{dx}{d\tau}\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \frac{dy}{d\tau}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}}{\frac{dx}{d\tau} + i\frac{dy}{d\tau}} \\ &\quad + i\frac{\frac{dx}{d\tau}\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} + \frac{dy}{d\tau}\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}}{\frac{dx}{d\tau} + i\frac{dy}{d\tau}}.\end{aligned}$$

Logo, para cada nova curva que escolhermos, teremos novas derivadas $dx/d\tau$ e $dy/d\tau$, mas não teremos mais $\Delta\tau$ no membro direito. Com isso, portanto, dá para calcularmos o seguinte limite:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} &= \frac{\frac{dx}{d\tau}\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \frac{dy}{d\tau}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}}{\frac{dx}{d\tau} + i\frac{dy}{d\tau}} \\ &\quad + i\frac{\frac{dx}{d\tau}\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} + \frac{dy}{d\tau}\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}}{\frac{dx}{d\tau} + i\frac{dy}{d\tau}}.\end{aligned}$$

No entanto, do jeito que está, parece que para cada curva que escolhemos o resultado do limite será diferente e, portanto, a função não será analítica no ponto z. Porém, como hipótese na recíproca do teorema de Cauchy & Riemann, as relações

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$$

e

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$$

são verdadeiras e, portanto, podemos reescrever o limite acima assim:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} &= \frac{\frac{dx}{d\tau}\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}-\frac{dy}{d\tau}\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}}{\frac{dx}{d\tau}+i\frac{dy}{d\tau}} \\ &\quad +i\frac{\frac{dx}{d\tau}\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}+\frac{dy}{d\tau}\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}}{\frac{dx}{d\tau}+i\frac{dy}{d\tau}},\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} &= \frac{\frac{dx}{d\tau}\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+i\frac{dy}{d\tau}\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}}{\frac{dx}{d\tau}+i\frac{dy}{d\tau}} \\ &\quad +\frac{-\frac{dy}{d\tau}\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}+i\frac{dx}{d\tau}\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}}{\frac{dx}{d\tau}+i\frac{dy}{d\tau}},\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} &= \left(\frac{\frac{dx}{d\tau}+i\frac{dy}{d\tau}}{\frac{dx}{d\tau}+i\frac{dy}{d\tau}}\right)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \\ &\quad +\left(\frac{-\frac{dy}{d\tau}+i\frac{dx}{d\tau}}{\frac{dx}{d\tau}+i\frac{dy}{d\tau}}\right)\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \\ &= \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \\ &\quad +i\left(\frac{i\frac{dy}{d\tau}+\frac{dx}{d\tau}}{\frac{dx}{d\tau}+i\frac{dy}{d\tau}}\right)\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+i\frac{\partial v(x,y)}{\partial x},$$

independentemente de nossa escolha da curva por onde fazemos o limite em que $\Delta z\to 0$. Em suma, uma função é analítica no ponto z se e somente se satisfaz as condições de Cauchy & Riemann, como queríamos demonstrar.