Funções especiais

Neste curso vamos ver brevemente algumas funções especiais que são encontradas em outras disciplinas, como eletromagnetismo e mecânica quântica. Veremos:

- funções de Bessel;
- polinômios de Hermite;
- polinômios de Legendre; e
- polinômios de Laguerre.

Funções de Bessel cilíndricas

Em três dimensões, o laplaciano é dado por

$$\nabla^2 g \quad = \quad \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial g}{\partial\varrho}\right) + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}.$$

Nessa equação temos a distância ortogonal ao eixo z dada por

$$\varrho \quad \equiv \quad \sqrt{x^2+y^2},$$

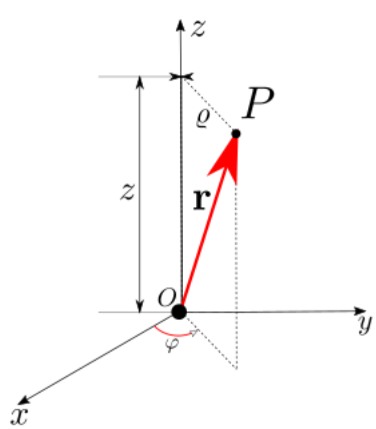
onde x e y são as coordenadas no plano xy de um dado ponto P do espaço tridimenesional. O ângulo φ é definido tal que

$$x \quad = \quad \varrho\cos\varphi$$

e

$$y \quad = \quad \varrho\operatorname{sen}\varphi.$$

A coordenada z é usada tanto em coordenadas cartesianas como em coordenadas cilíndricas. A figura a seguir ilustra isso que acabamos de apresentar.



Também vamos precisar de três versores, cada um ao longo da direção e sentido do aumento de cada uma das coordenadas cilíndricas. Assim, é evidente que o versor $\hat{\mathbf{z}}$ é o mesmo versor que nas coordenadas cartesianas. Já o versor ao longo do sentido de crescimento de ϱ está sempre paralelo ao plano xy e faz um ângulo φ com o eixo x. Logo, temos, para suas componentes, $\cos\varphi$ ao longo de x e $\mathrm{sen}\varphi$ ao longo de y :

$$\hat{\boldsymbol{\varrho}} \equiv \hat{\mathbf{x}}\cos\varphi + \hat{\mathbf{y}}\mathrm{sen}\varphi.$$

Podemos também definir o vetor $\boldsymbol{\varrho}$ que tem sentido e direção de $\hat{\boldsymbol{\varrho}}$, com módulo ϱ, isto é,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varrho} &\equiv \hat{\boldsymbol{\varrho}}\varrho \\ &= \hat{\mathbf{x}}\varrho\cos\varphi + \hat{\mathbf{y}}\varrho\mathrm{sen}\varphi. \end{aligned}$$

Finalmente, temos ainda o versor ao longo do crescimento de φ, que também é sempre paralelo ao plano xy e é perpendicular ao versor $\hat{\varrho}$. Nós usamos para seu símbolo matemático $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$. Quando $\varphi = 0$ sabemos que o versor $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ coincide com o versor $\hat{\mathbf{y}}$ e, portanto,

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}} \equiv -\hat{\mathbf{x}}\mathrm{sen}\varphi + \hat{\mathbf{y}}\cos\varphi.$$

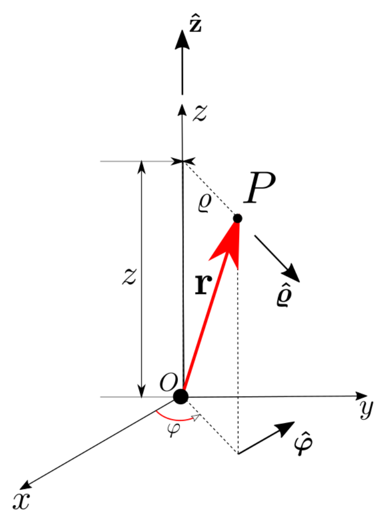
Vemos claramente que

$$\hat{\boldsymbol{\varrho}} \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}} = 0$$

e

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\varrho}} \times \hat{\boldsymbol{\varphi}} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \cos\varphi & \mathrm{sen}\varphi & 0 \\ -\mathrm{sen}\varphi & \cos\varphi & 0 \end{vmatrix} \\ &= \hat{\mathbf{z}}. \end{aligned}$$

A próxima figura mostra esses versores.



Como anteriormente, quando estudamos o caso bidimensional da equação de Laplace, aqui o gradiente é parecido, mas agora tem também a componente ao longo do eixo z. É fácil agora ver, seguindo o que foi mostrado acima e o caso bidimensional que já vimos, que o gradiente de uma função g é dado por

$$\boldsymbol{\nabla} g = \hat{\boldsymbol{\varrho}}\frac{\partial g}{\partial \varrho} + \hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{1}{\varrho}\frac{\partial g}{\partial \varphi} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial g}{\partial z}. \tag{1}$$

Para coordenadas polares esféricas os raciocínios são semelhantes. É um bom exercício deduzir tanto o gradiente como o laplaciano também em coordenadas polares esféricas.

Um exemplo eletrostático trivial

Um exemplo eletrostático interessante ocorre quando temos uma casca cilíndrica, de espessura desprezível, condutora e de comprimento infinito, com seção transversal constante e circular, de raio a, que está uniformemente carregada com densidade superficial constante σ. Queremos calcular o potencial eletrostático em todo ponto do espaço. Podemos fazer facilmente isto com a lei de Gauss e o que já aprendemos em eletrostática. Mas aqui, por razões didáticas, vamos usar o método de separação de variáveis para resolver a equação de Laplace.

Vamos inicialmente notar que só há cargas na superfície condutora de raio a. Em qualquer outro ponto, não havendo carga no ponto, o potencial Φ satisfaz a equação de Laplace, isto é,

$$\nabla^2\Phi\left(\varrho,\varphi,z\right) = 0,$$

onde aqui, baseados na simetria claramente cilíndrica do problema, já estamos escolhendo coordenadas cilíndrica e, portanto, $\Phi = \Phi\left(\varrho,\varphi,z\right)$.

Vamos escolher o eixo z coincidente com o eixo de simetria do cilindro. Não temos tampas neste cilindro infinito e, assim, a direção z é distinta das direções transversais ao eixo z, que têm a superfície da casca cilíndrica condutora, que separa o espaço em duas regiões distintas, uma para $\varrho > a$ e outra para $0 \leqslant \varrho < a$. Procedendo à escolha das funções para separação de variáveis, escrevemos o ansatz seguinte:

$$\Phi\left(\varrho,\varphi,z\right) = R\left(\varrho\right)F\left(\varphi\right)Z\left(z\right).$$

Assim, a equação de Laplace fica:

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left[\varrho\frac{\partial R\left(\varrho\right)F\left(\varphi\right)Z\left(z\right)}{\partial\varrho}\right] + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 R\left(\varrho\right)F\left(\varphi\right)Z\left(z\right)}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 R\left(\varrho\right)F\left(\varphi\right)Z\left(z\right)}{\partial z^2} = 0,$$

isto é,

$$\frac{F\left(\varphi\right)Z\left(z\right)}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left[\varrho\frac{\partial R\left(\varrho\right)}{\partial\varrho}\right] + \frac{R\left(\varrho\right)Z\left(z\right)}{\varrho^2}\frac{\partial^2 F\left(\varphi\right)}{\partial\varphi^2} + R\left(\varrho\right)F\left(\varphi\right)\frac{\partial^2 Z\left(z\right)}{\partial z^2} = 0.$$

Dividindo ambos os membros desta equação por $R\left(\varrho\right)F\left(\varphi\right)Z\left(z\right)$, vem:

$$\frac{1}{\varrho R\left(\varrho\right)}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left[\varrho\frac{\partial R\left(\varrho\right)}{\partial\varrho}\right] + \frac{1}{\varrho^2 F\left(\varphi\right)}\frac{\partial^2 F\left(\varphi\right)}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{Z\left(z\right)}\frac{\partial^2 Z\left(z\right)}{\partial z^2} = 0.$$

Também podemos, antes de mais nada, reescrever esta equação assim:

$$\frac{1}{Z\left(z\right)}\frac{\partial^2 Z\left(z\right)}{\partial z^2} = -\frac{1}{\varrho R\left(\varrho\right)}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left[\varrho\frac{\partial R\left(\varrho\right)}{\partial\varrho}\right] - \frac{1}{\varrho^2 F\left(\varphi\right)}\frac{\partial^2 F\left(\varphi\right)}{\partial\varphi^2}.$$

Esta equação está dizendo que uma função puramente da variável independente z é igual a uma função das variáveis independentes ϱ e φ. Isto só pode ocorrer se ambas estas funções são iguais a uma constante. Sendo assim, vemos que

$$\frac{1}{Z(z)}\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = -k_z^2$$

e

$$\frac{1}{\varrho R(\varrho)}\frac{\partial}{\partial \varrho}\left[\varrho\frac{\partial R(\varrho)}{\partial \varrho}\right] + \frac{1}{\varrho^2 F(\varphi)}\frac{\partial^2 F(\varphi)}{\partial \varphi^2} = k_z^2,$$

onde k_z é uma constante a ser determinada. Multiplicando esta segunda equação por ϱ^2 e rearranjando os termos, obtemos:

$$\frac{1}{F(\varphi)}\frac{\partial^2 F(\varphi)}{\partial \varphi^2} = k_z^2\varrho^2 - \frac{\varrho}{R(\varrho)}\frac{\partial}{\partial \varrho}\left[\varrho\frac{\partial R(\varrho)}{\partial \varrho}\right].$$

Neste caso, esta equação está dizendo que uma função puramente da variável independente φ é igual a uma função da variável independente ϱ e, portanto, ambas têm que ser iguais a uma constante:

$$\frac{1}{F(\varphi)}\frac{\partial^2 F(\varphi)}{\partial \varphi^2} = -k_\varphi^2$$

e

$$k_\varphi^2 = -k_z^2\varrho^2 + \frac{\varrho}{R(\varrho)}\frac{\partial}{\partial \varrho}\left[\varrho\frac{\partial R(\varrho)}{\partial \varrho}\right],$$

ou seja,

$$\frac{\varrho}{R(\varrho)}\frac{\partial}{\partial \varrho}\left[\varrho\frac{\partial R(\varrho)}{\partial \varrho}\right] - k_z^2\varrho^2 = k_\varphi^2,$$

onde k_φ é outra constante a ser determinada.

As equações para Z e para F são facilmente resolvidas:

$$Z(z) = A_z \operatorname{sen}(k_z z) + B_z \cos(k_z z)$$

e

$$F(\varphi) = A_\varphi \operatorname{sen}(k_\varphi \varphi) + B_\varphi \cos(k_\varphi \varphi),$$

onde as constantes A_z, B_z, A_φ e B_φ devem ser determinadas. Já a equação para R pode ser reescrita assim:

$$\frac{\partial}{\partial \varrho}\left[\varrho\frac{\partial R(\varrho)}{\partial \varrho}\right] - \left(\frac{k_\varphi^2}{\varrho} + k_z^2\varrho\right) R(\varrho) = 0.$$

Esta equação parece difícil de ser resolvida. É uma equação que vai dar origem à equação de Bessel cilíndrica. Mas antes de ver isso, vamos tentar aplicar as condições de contorno e ver se simplificamos nosso problema.

Notemos que, ao longo do eixo z, que coincide com o eixo de simetria do cilindro, neste problema eletrostático, temos que ter todos os planos perpendiculares ao eixo z equivalentes. Então, o potencial elétrico não pode variar ao longo de z, pois isto violaria a invariância translacional ao longo do eixo de simetria do problema. Fisicamente não há como distinguir um ponto

(ϱ, φ, z_1) de outro (ϱ, φ, z_2) com $z_2 \neq z_1$, já que não há nenhuma razão física para que estes pontos não sejam equivalentes. Sendo assim, concluímos que $k_z = 0$ e $Z(z) = B_z$ é uma função constante.

De forma análoga, temos simetria azimutal, isto é, fisicamente não é possível distinguir um ponto (ϱ, φ_1, z) de outro (ϱ, φ_2, z) com $\varphi_2 \neq \varphi_1$, e, assim, também temos $k_\varphi = 0$, com $F(\varphi) = B_\varphi$ outra função constante.

Vejamos agora o que a equação radial nos dá:

$$\frac{\partial}{\partial \varrho}\left[\varrho \frac{\partial R(\varrho)}{\partial \varrho}\right] = 0,$$

já que $k_z = k_\varphi = 0$. A derivada sendo nula implica que

$$\varrho \frac{\partial R(\varrho)}{\partial \varrho} = C_1,$$

onde C_1 é uma constante a ser determinada pelas condições de contorno. Assim,

$$\frac{\partial R(\varrho)}{\partial \varrho} = \frac{C_1}{\varrho}$$

e, portanto,

$$R(\varrho) = C_1 \ln \varrho + C_2,$$

onde C_2 é outra constante a ser determinada pelas condições de contorno (de uma certa maneira, pois o potencial eletrostático é sempre determinado a menos de uma constante aditiva).

Para a direção radial ϱ nós precisamos saber como conectar duas soluções para $R(\varrho)$, uma quando $\varrho > a$ e outra quando $0 \leqslant \varrho \leqslant a$. Sabemos que, usando unidades CGS, o campo elétrico é nulo para $0 \leqslant \varrho < a$ e vale $4\pi\sigma$ exatamente sobre a superfície quando $\varrho \to a$ por valores maiores do que a. Além disso, o campo elétrico é normal à superfície do cilindro, isto é, tem a direção de $\hat{\boldsymbol{\varrho}}$. Mas sabemos também que

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi(\varrho, \varphi, z)$$

e, assim,

$$\hat{\boldsymbol{\varrho}} \cdot \mathbf{E} = -\hat{\boldsymbol{\varrho}} \cdot \boldsymbol{\nabla}\Phi(\varrho, \varphi, z).$$

Como vimos acima, na Eq. (1),

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\varrho}} \cdot \mathbf{E} &= -\frac{\partial}{\partial \varrho}\Phi(\varrho, \varphi, z) \\
&= -B_z B_\varphi \frac{\partial R(\varrho)}{\partial \varrho} \\
&= -B_z B_\varphi \frac{C_1}{\varrho}
\end{aligned}$$

para $\varrho \to a$ por valores maiores do que a. Neste caso, temos que $\hat{\boldsymbol{\varrho}} \cdot \mathbf{E} = 4\pi\sigma$ e, portanto,

$$-B_z B_\varphi \frac{C_1}{a} = 4\pi\sigma.$$

Assim, para $\varrho > a$, segue que

$$\begin{aligned}\Phi(\varrho,\varphi,z) &= B_z B_\varphi (C_1 \ln\varrho + C_2) \\ &= B_z B_\varphi C_1 \ln\varrho + B_z B_\varphi C_2 \\ &= -4\pi\sigma a \ln\varrho - 4\pi\sigma a \frac{C_2}{C_1}.\end{aligned}$$

O potencial, suposto contínuo, assume o valor

$$\Phi(a,\varphi,z) = -4\pi\sigma a \ln a - 4\pi\sigma a \frac{C_2}{C_1}$$

constante sobre a superfície do condutor e para $0 \leqslant \varrho < a$, por continuidade, pois, segundo a lei de Gauss, não há fluxo do campo elétrico entrando ou saindo da região $0 \leqslant \varrho < a$. Vamos usar como o valor nulo para o potencial, seu valor para $\varrho = a$. Neste caso, temos:

$$0 = -4\pi\sigma a \ln a - 4\pi\sigma a \frac{C_2}{C_1}$$

e, assim,

$$\frac{C_2}{C_1} = -\ln a.$$

Com isso vemos que o potencial é nulo para $0 \leqslant \varrho \leqslant a$ e, para $\varrho > a$, fica:

$$\Phi(\varrho,\varphi,z) = -4\pi\sigma a \ln\varrho + 4\pi\sigma a \ln a,$$

isto é,

$$\Phi(\varrho,\varphi,z) = -4\pi\sigma a \ln\left(\frac{\varrho}{a}\right).$$

Também podemos supor que estamos olhando, agora, o condutor de um ponto onde $\varrho \gg a$. Neste caso, podemos pensar que, em um trecho de comprimento ℓ ao longo do condutor, temos uma carga total dada por $\sigma 2\pi a\ell$, de forma que, dividindo esta carga por ℓ, obtemos a densidade linear de carga efetiva para o condutor, ou seja,

$$\lambda = 2\pi\sigma a.$$

Assim, para $\varrho \gg a$,

$$\Phi(\varrho,\varphi,z) = -2\lambda \ln\left(\frac{\varrho}{a}\right),$$

dando um campo elétrico que é

$$\mathbf{E} = \hat{\boldsymbol{\varrho}} \frac{2\lambda}{\varrho},$$

como deveria ser mesmo.

(1) **Exercício**: resolva o problema acima, mas agora com a condição de contorno tal que $\Phi(a,\varphi,z) = V_0$, com V_0 sendo uma constante dada ao invés de ter sido dada a densidade σ.

Um exemplo eletrostático não trivial

Vamos supor agora que, ao invés de termos um cilindro condutor infinito, temos um cilindro finito e não condutor, mas feito de um material dielétrico. Vamos tomar as tampas do cilindro circular de raio a como sendo ortogonais ao eixo de simetria do cilindro, escolhido como o eixo z, e distantes uma distância L entre si. Em sua superfície lateral interna, vamos tomar como condição de contorno uma função $\Phi(a,\varphi,z)=0$ especificando o potencial em cada um dos pontos dessa superfície. Também vamos considerar que $\Phi(\varrho,\varphi,0)=0$ e $\Phi(\varrho,\varphi,L)=f(\varrho,\varphi)$ nas superfícies internas de suas tampas. Vamos considerar a solução no interior deste cilindro dielétrico, cujas fronteiras são as tampas nos extremos do cilindro e a superfície lateral. A simetria azimutal, neste caso, está quebrada, assim como a de translação longitudinal. Com isso, não podemos eliminar nem k_z nem k_φ de antemão. No entanto, como o potencial tem que assumir o mesmo valor independentemente do número de voltas que damos em torno do cilindro, vemos que a função $F(\varphi)$ tem que ter período 2π, ou seja,

$$F(\varphi+2\pi) = F(\varphi)$$

para todo $\varphi\in\mathbb{R}$. Mas, neste caso, como

$$F(\varphi) = A_\varphi \operatorname{sen}(k_\varphi\varphi)+B_\varphi\cos(k_\varphi\varphi),$$

segue que

$$A_\varphi \operatorname{sen}(k_\varphi\varphi+k_\varphi 2\pi)+B_\varphi\cos(k_\varphi\varphi+k_\varphi 2\pi) = A_\varphi \operatorname{sen}(k_\varphi\varphi)+B_\varphi\cos(k_\varphi\varphi),$$

para todo φ real. Escolhendo, portanto, $\varphi=0$, vem:

$$A_\varphi \operatorname{sen}(k_\varphi 2\pi)+B_\varphi\cos(k_\varphi 2\pi) = B_\varphi.$$

Para $\varphi=-\pi$, temos:

$$A_\varphi \operatorname{sen}(k_\varphi\pi)+B_\varphi\cos(k_\varphi\pi) = -A_\varphi \operatorname{sen}(k_\varphi\pi)+B_\varphi\cos(k_\varphi\pi),$$

ou seja,

$$2A_\varphi \operatorname{sen}(k_\varphi\pi) = 0$$

e, assim,

$$k_\varphi = m,$$

com $m=0,\pm1,\pm2,\ldots$ caso $A_\varphi\neq0$. Veja que com estes valores de k_φ a equação anterior,

$$A_\varphi \operatorname{sen}(k_\varphi 2\pi)+B_\varphi\cos(k_\varphi 2\pi) = B_\varphi,$$

também é satisfeita mesmo que $B_\varphi\neq0$.

Olhemos para a dependência com a coordenada z agora. As condições de contorno para as tampas são:

$$\Phi(\varrho,\varphi,0) = 0 \tag{2}$$

e

$$\Phi(\varrho,\varphi,L) = f(\varrho,\varphi). \tag{3}$$

Neste caso, portanto, a dependência com a variável z, que, como vimos, é dada por

$$Z(z) = A_z \mathrm{sen}(k_z z) + B_z \cos(k_z z),$$

quando escolhemos

$$B_z = 0,$$

dá:

$$Z(z) = A_z \mathrm{sen}(k_z z)$$

e, portanto,

$$Z(0) = 0,$$

satisfazendo a primeira condição de contorno acima, Eq. (2).

Agora podemos olhar para a equação radial, que fica:

$$\frac{\partial}{\partial \varrho}\left[\varrho \frac{\partial R(\varrho)}{\partial \varrho}\right] - \left(\frac{m^2}{\varrho} + k_z^2 \varrho\right) R(\varrho) = 0,$$

isto é,

$$\varrho \frac{d^2 R(\varrho)}{d\varrho^2} + \frac{dR(\varrho)}{d\varrho} - \left(\frac{m^2}{\varrho} + k_z^2 \varrho\right) R(\varrho) = 0,$$

onde trocamos as derivadas parciais por totais porque $R(\varrho)$ só depende de ϱ. Dividindo esta equação por ϱ, obtemos:

$$\frac{d^2 R(\varrho)}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{dR(\varrho)}{d\varrho} - \left(\frac{m^2}{\varrho^2} + k_z^2\right) R(\varrho) = 0.$$

Vejamos que temos que ter

$$R(a) = 0.$$

Como em $\varrho = 0$ não há carga livre alguma, $R(\varrho)$ tem que ser finita na origem. Se for uma constante, da equação radial vemos que esta constante se anula quando $m \neq 0$. Vemos da Eq. (3) que, em geral, vamos precisar de soluções também quando $m \neq 0$. Então, segue que $R(\varrho)$ não pode ser uma constante perto da origem nesse caso. Vamos propor que seja alguma potência ϱ^σ. Neste caso, a equação radial dá:

$$\sigma(\sigma - 1)\varrho^{\sigma-2} + \sigma \varrho^{\sigma-2} - \left(\frac{m^2}{\varrho^2} + k_z^2\right)\varrho^\sigma = 0,$$

isto é,

$$\sigma(\sigma - 1) + \sigma - \left(\frac{m^2}{\varrho^2} + k_z^2\right)\varrho^2 = 0,$$

ou seja,

$$\sigma^2 - m^2 - k_z^2 \varrho^2 = 0,$$

ou ainda, fazendo $\varrho \to 0$,

$$\sigma^2 - m^2 = 0.$$

Logo, vemos que, como $R(\varrho)$ deve ser finita na origem, então lá perto se comporta como $\varrho^{|m|}$ e, assim, deve se anular lá na origem e, também, em $\varrho = a$. Vemos pela Eq. (3) que, porque entre a origem e a superfície lateral, para $z = L$, há uma dependência com ϱ dada pela função $f(\varrho, \varphi)$, precisamos de um conjunto completo de autofunções para construir a função $R(\varrho)$. Assim, a melhor escolha seria termos funções que se anulam nesses valores, ou seja, precisamos de pelo menos um zero para cada autofunção radial. Como veremos, se tentarmos resolver a equação radial com $k_z \in \mathbb{R}$, não teremos soluções radiais com essa propriedade. Portanto, ao invés de usarmos k_z real, vamos tomar

$$k_z = i\kappa_z,$$

com $\kappa_z \in \mathbb{R}$. Com esta escolha, agora temos a seguinte equação radial:

$$\frac{d^2R(\varrho)}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{dR(\varrho)}{d\varrho} - \left(\frac{m^2}{\varrho^2} - \kappa_z^2\right)R(\varrho) = 0.$$

Por sua vez, a função $Z(z)$ agora fica:

$$\begin{aligned} Z(z) &= A_z \mathrm{sen}(i\kappa_z z) \\ &= A_z \frac{\exp(i^2\kappa_z z) - \exp(-i^2\kappa_z z)}{2i} \\ &= A_z \frac{\exp(-\kappa_z z) - \exp(\kappa_z z)}{2i} \\ &= iA_z \frac{\exp(\kappa_z z) - \exp(-\kappa_z z)}{2} \\ &= iA_z \mathrm{senh}(\kappa_z z). \end{aligned}$$

Também segue que podemos dividir ambos os membros da equação radial por κ_z^2, já que $\kappa_z \neq 0$, pois $Z(L)$ não pode ser zero, já que temos que ter $\Phi(\varrho, \varphi, L) = f(\varrho, \varphi) \neq 0$. Então, a equação radial se escreve também assim:

$$\frac{d^2R(\varrho)}{\kappa_z^2 d\varrho^2} + \frac{1}{\kappa_z\varrho}\frac{dR(\varrho)}{\kappa_z d\varrho} - \left[\frac{m^2}{(\kappa_z\varrho)^2} - 1\right]R(\varrho) = 0.$$

Vamos definir uma nova variável:

$$s \equiv \kappa_z \varrho.$$

Com isso, também façamos:

$$w(s) \equiv R\left(\frac{s}{\kappa_z}\right).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{dR(\varrho)}{\kappa_z d\varrho} &= \frac{1}{\kappa_z}\frac{ds}{d\varrho}\frac{d}{ds}R\left(\frac{s}{\kappa_z}\right) \\ &= \frac{1}{\kappa_z}\kappa_z\frac{d}{ds}w(s) \\ &= \frac{d}{ds}w(s) \\ &\equiv w'. \end{aligned}$$

Também,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 R(\varrho)}{\kappa_z^2 d\varrho^2} &= \frac{1}{\kappa_z}\frac{d}{d\varrho}\left[\frac{dR(\varrho)}{\kappa_z d\varrho}\right] \\
&= \frac{1}{\kappa_z}\frac{ds}{d\varrho}\frac{d}{ds}\left[\frac{d}{ds}w(s)\right] \\
&= \frac{d^2}{ds^2}w(s) \\
&\equiv w''.
\end{aligned}$$

Portanto, a equação radial agora se escreve:

$$w'' + \frac{1}{s}w' - \left(\frac{m^2}{s^2} - 1\right)w = 0,$$

isto é,

$$s^2 w'' + s w' + \left(s^2 - m^2\right)w = 0,$$

onde

$$w \equiv w(s).$$

Esta equação é justamente a equação de Bessel.

As funções de Bessel

Para $m \to \nu \in \mathbb{R}$ e nem precisa ser inteiro, as funções de Bessel podem ser obtidas assim:

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\nu+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2n},$$

onde a função $\Gamma(z)$ é a chamada função gama e é definida como:

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^\infty dx\, x^{z-1}\exp(-x),$$

onde $z \in \mathbb{C}$, mas com $\mathrm{Re}(z) > 0$.

(2) **Exercício**: mostre que

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

(3) **Exercício**: mostre que

$$\Gamma(n+1) = n!,$$

se n é um número inteiro não negativo.

Podemos trocar ν por $-\nu$ e obter $J_{-\nu}(z)$. Quando ν não é um número inteiro, vemos que as duas séries começam com dependências x^{ν} e $x^{-\nu}$ e, com isso, são linearmente independentes. Já se ν for inteiro, aí elas são linearmente dependentes, pois, nesse caso, se $\nu = m \in \mathbb{Z}$, segue que

$$J_{-m}(x) \;=\; (-1)^m J_m(x).$$

No nosso exemplo do dielétrico que começamos a resolver, temos o caso em que $\nu = m \in \mathbb{Z}$ e, portanto, só temos uma solução linearmente independente. Naquele problema, no entanto, é só o que precisamos, como veremos. Mas, caso quiséssemos outra função linearmente independente, precisaríamos construí-la como já sabemos fazer, através das técnicas de obter uma segunda solução. A função de Neumann, que é uma tal segunda solução, é linearmente independente à função de Bessel, para o mesmo ν que pode até ser inteiro, mas a definição serve para qualquer $\nu \in \mathbb{R}$. A função de Neumann é dada por:

$$N_\nu(x) \;\equiv\; \frac{J_\nu(x)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\operatorname{sen}(\nu\pi)}.$$

Veja que, para ν não inteiro essa definição não causa espanto algum. Mas, caso tomemos $\nu \to m$ onde $m \in \mathbb{Z}$, temos que tomar cuidado, pois o denominador tende a zero. Mas o numerador também, já que, nesse caso:

$$\begin{aligned}\lim_{\nu\to m}\left[J_\nu(x)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)\right] &= J_m(x)(-1)^m - J_{-m}(x)\\ &= J_m(x)(-1)^m - (-1)^m J_m(x)\\ &= 0.\end{aligned}$$

No caso de ν inteiro, portanto, devemos tomar o limite no numerador e no denominador, usando a regra de L'Hôpital e o resultado vai ser também chamada de função de Neumann, mas para ν inteiro. Alguns livros-texto, ao invés de usar $N_\nu(x)$, usa $Y_\nu(x)$.

Com isso que acabamos de expor, a solução geral para a equação de Bessel,

$$x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - \nu^2\right) y \;=\; 0,$$

é escrita como

$$y(x) \;=\; A J_\nu(x) + B N_\nu(x).$$

No nosso problema do dielétrico, então, podemos escolher, para a parte radial, a seguinte solução geral:

$$R(\varrho) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_m\left(\varrho \frac{q_{m,k}}{a}\right). \tag{4}$$

Veja que $q_{m,k}$ é o valor em que $J_m(x)$ tem seu k-ésimo zero, isto é,

$$\begin{aligned}J_m\left(a\frac{q_{m,k}}{a}\right) &= J_m(q_{m,k})\\ &= 0.\end{aligned}$$

Ortogonalidade entre funções de Bessel

Vamos demonstrar que há como termos, de fato, a Eq. (4) valendo, mesmo se escolhermos, ao invés de m inteiro, uma ordem qualquer $\nu \in \mathbb{R}$ não negativa. Vamos supor então que temos duas funções: $J_\nu(\alpha x)$ e $J_\nu(\beta x)$. Queremos calcular

$$I \;\equiv\; \int_a^b dx\, x J_\nu(\alpha x) J_\nu(\beta x) \tag{5}$$

e ver que se α e β forem escolhidas como proporcionais a zeros ou da função $J_\nu(x)$ ou de sua derivada, então teremos $I = 0$ para $\alpha \neq \beta$. A idéia é, então, escrevermos a equação de Bessel para $J_\nu(s)$, isto é,

$$s^2 \frac{d^2}{ds^2} J_\nu(s) + s\frac{d}{ds} J_\nu(s) + \left(s^2 - \nu^2\right) J_\nu(s) = 0.$$

Podemos fazer agora uma mudança de variável assim:

$$s \rightarrow \alpha x.$$

Logo, a equação para $J_\nu(s)$ agora se escreve, na nova variável x, assim:

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} J_\nu(\alpha x) + x\frac{d}{dx} J_\nu(\alpha x) + \left(\alpha^2 x^2 - \nu^2\right) J_\nu(\alpha x) = 0. \tag{6}$$

De forma análoga, temos também que

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} J_\nu(\beta x) + x\frac{d}{dx} J_\nu(\beta x) + \left(\beta^2 x^2 - \nu^2\right) J_\nu(\beta x) = 0. \tag{7}$$

Multiplicando a Eq. (6) por $J_\nu(\beta x)$ e a Eq. (7) por $J_\nu(\alpha x)$, subtraindo a segunda da primeira e dividindo ambos os membros da equação resultante por x, obtemos:

$$\begin{aligned}\left[x J_\nu(\beta x) \frac{d^2}{dx^2} J_\nu(\alpha x) - x J_\nu(\alpha x) \frac{d^2}{dx^2} J_\nu(\beta x)\right] \\ + \left[J_\nu(\beta x) \frac{d}{dx} J_\nu(\alpha x) - J_\nu(\alpha x) \frac{d}{dx} J_\nu(\beta x)\right] \\ + \left(\alpha^2 - \beta^2\right) x J_\nu(\beta x) J_\nu(\alpha x) &= 0.\end{aligned} \tag{8}$$

Mas agora sabemos que

$$\begin{aligned} x J_\nu(\beta x) \frac{d^2}{dx^2} J_\nu(\alpha x) &= x J_\nu(\beta x) \frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx} J_\nu(\alpha x)\right] \\ &= \frac{d}{dx}\left[x J_\nu(\beta x) \frac{d}{dx} J_\nu(\alpha x)\right] \\ &\quad - \left\{\frac{d}{dx}\left[x J_\nu(\beta x)\right]\right\}\left[\frac{d}{dx} J_\nu(\alpha x)\right] \end{aligned} \tag{9}$$

e, obviamente, de forma análoga,

$$\begin{aligned} x J_\nu(\alpha x) \frac{d^2}{dx^2} J_\nu(\beta x) &= \frac{d}{dx}\left[x J_\nu(\alpha x) \frac{d}{dx} J_\nu(\beta x)\right] \\ &\quad - \left\{\frac{d}{dx}\left[x J_\nu(\alpha x)\right]\right\}\left[\frac{d}{dx} J_\nu(\beta x)\right], \end{aligned}$$

de forma que

$$x\left[J_\nu(\beta x) \frac{d^2}{dx^2} J_\nu(\alpha x) - J_\nu(\alpha x) \frac{d^2}{dx^2} J_\nu(\beta x)\right] =$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}&\left[xJ_\nu(\beta x)\frac{d}{dx}J_\nu(\alpha x)-xJ_\nu(\alpha x)\frac{d}{dx}J_\nu(\beta x)\right]\\&-\left\{\frac{d}{dx}\left[xJ_\nu(\beta x)\right]\right\}\left[\frac{d}{dx}J_\nu(\alpha x)\right]\\&+\left\{\frac{d}{dx}\left[xJ_\nu(\alpha x)\right]\right\}\left[\frac{d}{dx}J_\nu(\beta x)\right],\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}x\left[J_\nu(\beta x)\frac{d^2}{dx^2}J_\nu(\alpha x)-J_\nu(\alpha x)\frac{d^2}{dx^2}J_\nu(\beta x)\right] &=\\ \frac{d}{dx}\left[xJ_\nu(\beta x)\frac{d}{dx}J_\nu(\alpha x)-xJ_\nu(\alpha x)\frac{d}{dx}J_\nu(\beta x)\right]&\\ -J_\nu(\beta x)\left[\frac{d}{dx}J_\nu(\alpha x)\right]-x\left[\frac{d}{dx}J_\nu(\beta x)\right]\left[\frac{d}{dx}J_\nu(\alpha x)\right]&\\ +J_\nu(\alpha x)\left[\frac{d}{dx}J_\nu(\beta x)\right]+x\left[\frac{d}{dx}J_\nu(\alpha x)\right]\left[\frac{d}{dx}J_\nu(\beta x)\right],&\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}x\left[J_\nu(\beta x)\frac{d^2}{dx^2}J_\nu(\alpha x)-J_\nu(\alpha x)\frac{d^2}{dx^2}J_\nu(\beta x)\right] &=\\ \frac{d}{dx}\left[xJ_\nu(\beta x)\frac{d}{dx}J_\nu(\alpha x)-xJ_\nu(\alpha x)\frac{d}{dx}J_\nu(\beta x)\right]&\\ -\left[J_\nu(\beta x)\frac{d}{dx}J_\nu(\alpha x)-J_\nu(\alpha x)\frac{d}{dx}J_\nu(\beta x)\right].&\end{aligned}$$

Substituindo este resultado na Eq. (8), dá:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[xJ_\nu(\beta x)\frac{d}{dx}J_\nu(\alpha x)-xJ_\nu(\alpha x)\frac{d}{dx}J_\nu(\beta x)\right]&\\ -\left[J_\nu(\beta x)\frac{d}{dx}J_\nu(\alpha x)-J_\nu(\alpha x)\frac{d}{dx}J_\nu(\beta x)\right]&\\ +\left[J_\nu(\beta x)\frac{d}{dx}J_\nu(\alpha x)-J_\nu(\alpha x)\frac{d}{dx}J_\nu(\beta x)\right]&\\ +\left(\alpha^2-\beta^2\right)xJ_\nu(\beta x)J_\nu(\alpha x) &= 0,\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[xJ_\nu(\beta x)\frac{d}{dx}J_\nu(\alpha x)-xJ_\nu(\alpha x)\frac{d}{dx}J_\nu(\beta x)\right]&\\ +\left(\alpha^2-\beta^2\right)xJ_\nu(\beta x)J_\nu(\alpha x) &= 0.\end{aligned}$$

Integrando esta equação desde a até b, obtemos:

$$\left[xJ_\nu(\beta x)\frac{d}{dx}J_\nu(\alpha x)-xJ_\nu(\alpha x)\frac{d}{dx}J_\nu(\beta x)\right]_a^b$$

$$+\left(\alpha^2-\beta^2\right)\int_a^b dx\,xJ_\nu\left(\beta x\right)J_\nu\left(\alpha x\right) = 0,$$

ou seja, quando $\alpha \neq \beta$, esta equação dá:

$$\int_a^b dx\,xJ_\nu\left(\beta x\right)J_\nu\left(\alpha x\right) = \frac{1}{\alpha^2-\beta^2}\left[xJ_\nu\left(\beta x\right)\frac{d}{dx}J_\nu\left(\alpha x\right)-xJ_\nu\left(\alpha x\right)\frac{d}{dx}J_\nu\left(\beta x\right)\right]_a^b. \tag{10}$$

Basta, portanto, que α e β sejam escolhidas de forma a termos

$$\left[xJ_\nu\left(\beta x\right)\frac{d}{dx}J_\nu\left(\alpha x\right)-xJ_\nu\left(\alpha x\right)\frac{d}{dx}J_\nu\left(\beta x\right)\right]_a^b = 0$$

e teremos $J_\nu\left(\alpha x\right)$ e $J_\nu\left(\beta x\right)$ ortogonais. No caso, por exemplo, em que $a=0$, por causa do fator x nesta equação, basta escolhermos α/b e β/b como raízes distintas de $J_\nu\left(s\right)$ para termos $J_\nu\left(\alpha x\right)$ e $J_\nu\left(\beta x\right)$ ortogonais, que foi o que fizemos no caso da Eq. (4) acima.

Mas e se $\alpha=\beta$ na Eq. (5)? Neste caso,

$$I = \int_a^b dx\,x\left[J_\nu\left(\alpha x\right)\right]^2. \tag{11}$$

Na Eq. (6) não aparece $xJ_\nu\left(\alpha x\right)$, mas apenas $J_\nu\left(\alpha x\right)$ e $x^2J_\nu\left(\alpha x\right)$, além das derivadas de $J_\nu\left(\alpha x\right)$. Então, seguindo o livro-texto, vamos fazer aparecer x^2 na Eq. (11). Notemos que

$$\frac{d}{dx}\left\{x^2\left[J_\nu\left(\alpha x\right)\right]^2\right\} = 2x\left[J_\nu\left(\alpha x\right)\right]^2+2x^2J_\nu\left(\alpha x\right)\frac{d}{dx}J_\nu\left(\alpha x\right).$$

Integrando este resultando, vem:

$$\int_a^b dx\,\frac{d}{dx}\left\{x^2\left[J_\nu\left(\alpha x\right)\right]^2\right\} = 2\int_a^b dx\,x\left[J_\nu\left(\alpha x\right)\right]^2+2\int_a^b dx\,x^2J_\nu\left(\alpha x\right)\frac{d}{dx}J_\nu\left(\alpha x\right),$$

isto é,

$$\left.\left\{x^2\left[J_\nu\left(\alpha x\right)\right]^2\right\}\right|_a^b = 2I+2\int_a^b dx\,x^2J_\nu\left(\alpha x\right)\frac{d}{dx}J_\nu\left(\alpha x\right),$$

ou seja,

$$I = \frac{1}{2}\left.\left\{x^2\left[J_\nu\left(\alpha x\right)\right]^2\right\}\right|_a^b-\int_a^b dx\,x^2J_\nu\left(\alpha x\right)\frac{d}{dx}J_\nu\left(\alpha x\right), \tag{12}$$

onde usamos a Eq. (11). Agora, usando a Eq. (6), obtemos:

$$x^2J_\nu\left(\alpha x\right) = \frac{\nu^2}{\alpha^2}J_\nu\left(\alpha x\right)-\frac{x}{\alpha^2}\frac{d}{dx}J_\nu\left(\alpha x\right)-\frac{x^2}{\alpha^2}\frac{d^2}{dx^2}J_\nu\left(\alpha x\right).$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_a^b dx\,x^2J_\nu\left(\alpha x\right)\frac{d}{dx}J_\nu\left(\alpha x\right) &= \int_a^b dx\,\frac{\nu^2}{\alpha^2}J_\nu\left(\alpha x\right)\frac{d}{dx}J_\nu\left(\alpha x\right)\\ &-\int_a^b dx\,\frac{x}{\alpha^2}\left[\frac{d}{dx}J_\nu\left(\alpha x\right)\right]\left[\frac{d}{dx}J_\nu\left(\alpha x\right)\right]\\ &-\int_a^b dx\,\frac{x^2}{\alpha^2}\left[\frac{d^2}{dx^2}J_\nu\left(\alpha x\right)\right]\left[\frac{d}{dx}J_\nu\left(\alpha x\right)\right],\end{aligned}$$

isto é,

$$
\begin{aligned}
\int_a^b dx\, x^2 J_\nu(\alpha x)\, \frac{d}{dx} J_\nu(\alpha x) &= \int_a^b dx\, \frac{\nu^2}{\alpha^2} J_\nu(\alpha x)\, \frac{d}{dx} J_\nu(\alpha x) \\
&\quad - \int_a^b dx\, \frac{x}{\alpha^2} \left[\frac{d}{dx} J_\nu(\alpha x)\right] \left[\frac{d}{dx} J_\nu(\alpha x)\right] \\
&\quad - \int_a^b dx\, \frac{x^2}{\alpha^2} \left[\frac{d}{dx}\frac{d}{dx} J_\nu(\alpha x)\right] \left[\frac{d}{dx} J_\nu(\alpha x)\right],
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
\int_a^b dx\, x^2 J_\nu(\alpha x)\, \frac{d}{dx} J_\nu(\alpha x) &= \frac{1}{2}\frac{\nu^2}{\alpha^2} \int_a^b dx\, \frac{d}{dx} \left[J_\nu(\alpha x)\right]^2 \\
&\quad - \int_a^b dx\, \frac{x}{\alpha^2} \left[\frac{d}{dx} J_\nu(\alpha x)\right] \left[\frac{d}{dx} J_\nu(\alpha x)\right] \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_a^b dx\, \frac{x^2}{\alpha^2} \frac{d}{dx} \left[\frac{d}{dx} J_\nu(\alpha x)\right]^2,
\end{aligned}
$$

ou ainda,

$$
\begin{aligned}
\int_a^b dx\, x^2 J_\nu(\alpha x)\, \frac{d}{dx} J_\nu(\alpha x) &= \frac{1}{2}\frac{\nu^2}{\alpha^2} \int_a^b dx\, \frac{d}{dx} \left[J_\nu(\alpha x)\right]^2 \\
&\quad - \frac{1}{\alpha^2} \int_a^b dx\, x \left[\frac{d}{dx} J_\nu(\alpha x)\right]^2 \\
&\quad - \frac{1}{2\alpha^2} \int_a^b dx\, \frac{d}{dx} \left\{x^2 \left[\frac{d}{dx} J_\nu(\alpha x)\right]^2\right\} \\
&\quad + \frac{1}{\alpha^2} \int_a^b dx\, x \left[\frac{d}{dx} J_\nu(\alpha x)\right]^2.
\end{aligned}
$$

Simplificando e integrando, temos:

$$
\int_a^b dx\, x^2 J_\nu(\alpha x)\, \frac{d}{dx} J_\nu(\alpha x) = \frac{1}{2}\frac{\nu^2}{\alpha^2} \left[J_\nu(\alpha x)\right]^2\Big|_a^b - \frac{1}{2\alpha^2} \left\{x^2 \left[\frac{d}{dx} J_\nu(\alpha x)\right]^2\right\}\Bigg|_a^b .
$$

Substituindo isto na Eq. (12), dá:

$$
I = \frac{1}{2}\, x^2 \left[J_\nu(\alpha x)\right]^2\Big|_a^b - \frac{1}{2}\frac{\nu^2}{\alpha^2} \left[J_\nu(\alpha x)\right]^2\Big|_a^b + \frac{1}{2\alpha^2} \left\{x^2 \left[\frac{d}{dx} J_\nu(\alpha x)\right]^2\right\}\Bigg|_a^b ,
$$

isto é,

$$
I = \frac{1}{2} \left\{\left(x^2 - \frac{\nu^2}{\alpha^2}\right) \left[J_\nu(\alpha x)\right]^2 + \frac{x^2}{\alpha^2} \left[\frac{d}{dx} J_\nu(\alpha x)\right]^2\right\}\Bigg|_a^b . \tag{13}
$$

(4) Exercício: calcule os coeficientes da Eq. (4)

Resolução: queremos encontrar os coeficientes a_k da seguinte expansão:

$$R(\varrho) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_m\left(\varrho \frac{q_{m,k}}{a}\right). \tag{14}$$

Neste caso a Eq. (10) fica:

$$\begin{aligned}
\int_0^a dx\, x J_m\left(\frac{q_{m,p}}{a}x\right) J_m\left(\frac{q_{m,k}}{a}x\right) &= \frac{a^2}{q_{m,k}^2 - q_{m,p}^2}\left[x J_m\left(\frac{q_{m,p}}{a}x\right)\frac{d}{dx}J_m\left(\frac{q_{m,k}}{a}x\right)\right. \\
&\quad \left. - x J_m\left(\frac{q_{m,k}}{a}x\right)\frac{d}{dx}J_m\left(\frac{q_{m,p}}{a}x\right)\right]_0^a \\
&= \frac{a^2}{q_{m,k}^2 - q_{m,p}^2}\left[a J_m(q_{m,p})\left[\frac{d}{dx}J_m\left(\frac{q_{m,k}}{a}x\right)\right]_{x=a}\right. \\
&\quad \left. - a J_m(q_{m,k})\left[\frac{d}{dx}J_m\left(\frac{q_{m,p}}{a}x\right)\right]_{x=a}\right] \\
&= 0,
\end{aligned}$$

se $p \neq k$. Multiplicando a Eq. (14) por $x J_m\left(\frac{q_{m,p}}{a}x\right)$ e integrando entre 0 e a, obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^a dx\, x J_m\left(\frac{q_{m,p}}{a}x\right) R(\varrho) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_0^a dx\, x J_m\left(\frac{q_{m,p}}{a}x\right) J_m\left(\varrho\frac{q_{m,k}}{a}\right) \\
&= a_p \int_0^a dx\, x\left[J_m\left(\frac{q_{m,p}}{a}x\right)\right]^2.
\end{aligned}$$

Mas a integral que apareceu é justamente aquela da Eq. (11) para este caso especial, cujo resultado é dado pela Eq. (13) e, para este exercício, fica:

$$\begin{aligned}
\int_0^a dx\, x\left[J_m\left(\frac{q_{m,p}}{a}x\right)\right]^2 &= \\
\frac{1}{2}\left\{\left(x^2 - a^2\frac{\nu^2}{q_{m,p}^2}\right)\left[J_m\left(\frac{q_{m,p}}{a}x\right)\right]^2 + a^2\frac{x^2}{q_{m,p}^2}\left[\frac{d}{dx}J_m\left(\frac{q_{m,p}}{a}x\right)\right]^2\right\}\Bigg|_0^a &= \\
\frac{1}{2}\frac{a^4}{q_{m,p}^2}\left[\frac{d}{dx}J_m\left(\frac{q_{m,p}}{a}x\right)\right]_{x=a}^2
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$a_p = \frac{2q_{m,p}^2 \int_0^a dx\, x J_m\left(\frac{q_{m,p}}{a}x\right) R(\varrho)}{a^4\left[\frac{d}{dx}J_m\left(\frac{q_{m,p}}{a}x\right)\right]_{x=a}^2}.$$

(5) Exercício: demonstre que

$$J_{\nu+1}(x) = -x^{\nu}\frac{d}{dx}\left[x^{-\nu}J_{\nu}(x)\right].$$

Resolução: sabemos que

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\nu+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2n}.$$

Então,

$$\begin{aligned}
x^{-\nu} J_\nu(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\nu+n+1)} x^{-\nu} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\nu+n+1)} \frac{1}{2^\nu} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}.
\end{aligned}$$

Tomando a derivada desta equação, vem:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[x^{-\nu} J_\nu(x)\right] &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\nu+n+1)} \frac{n}{2^\nu} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1} \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!\Gamma(\nu+n+2)} \frac{(n+1)}{2^\nu} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1} \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\nu+n+2)} \frac{1}{2^\nu} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1} \\
&= -x^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\nu+n+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1} \\
&= -x^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma((\nu+1)+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+1+2n} \\
&= -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x),
\end{aligned}$$

que dá a resposta.

Outro exemplo: Membrana vibrante

Coordenadas polares planas (de novo)

Vamos começar escrevendo a equação de onda em duas dimensões:

$$\frac{\partial^2 \varphi(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x,y,t)}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi(x,y,t)}{\partial t^2} = 0.$$

Como a fronteira da membrana que vamos considerar é circular de raio a, vamos mudar para coordenadas polares planas:

$$x = \varrho \cos\varphi$$

e

$$y = \varrho \operatorname{sen}\varphi.$$

Nestas novas coordenadas, definimos a nova amplitude da onda:

$$\begin{aligned} \psi(\varrho, \varphi, t) &\equiv \varphi(x, y, t) \\ &= \varphi(\varrho \cos\varphi, \varrho \mathrm{sen}\varphi, t). \end{aligned}$$

Vamos então escrever a equação de onda para $\psi(\varrho, \varphi, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(\varrho, \varphi, t)}{\partial \varrho} &= \frac{\partial x}{\partial \varrho} \frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \varrho} \frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial y} \\ &= \cos\varphi \frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial x} + \mathrm{sen}\varphi \frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial y} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(\varrho, \varphi, t)}{\partial \varphi} &= \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial y} \\ &= -\varrho \mathrm{sen}\varphi \frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial x} + \varrho \cos\varphi \frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial y}, \end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial \psi(\varrho, \varphi, t)}{\partial \varphi} = -\mathrm{sen}\varphi \frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial x} + \cos\varphi \frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial y}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \cos\varphi \frac{\partial \psi(\varrho, \varphi, t)}{\partial \varrho} - \mathrm{sen}\varphi \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \psi(\varrho, \varphi, t)}{\partial \varphi} &= \cos\varphi \left[\cos\varphi \frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial x} + \mathrm{sen}\varphi \frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial y} \right] \\ &\quad -\mathrm{sen}\varphi \left[-\mathrm{sen}\varphi \frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial x} + \cos\varphi \frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial y} \right] \\ &= \cos^2\varphi \frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial x} + \mathrm{sen}\varphi \cos\varphi \frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial y} \\ &\quad \mathrm{sen}^2\varphi \frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial x} - \mathrm{sen}\varphi \cos\varphi \frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial y} \\ &= \frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial x}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, y, t) = \left[\cos\varphi \frac{\partial}{\partial \varrho} - \mathrm{sen}\varphi \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \psi(\varrho, \varphi, t).$$

Logo,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, y, t) \right] = \left[\cos\varphi \frac{\partial}{\partial \varrho} - \mathrm{sen}\varphi \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right]^2 \psi(\varrho, \varphi, t). \tag{15}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\text{sen}\varphi\frac{\partial\psi(\varrho,\varphi,t)}{\partial\varrho}+\cos\varphi\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\psi(\varrho,\varphi,t)}{\partial\varphi} &= \text{sen}\varphi\left[\cos\varphi\frac{\partial\varphi(x,y,t)}{\partial x}+\text{sen}\varphi\frac{\partial\varphi(x,y,t)}{\partial y}\right]\\
&\quad+\cos\varphi\left[-\text{sen}\varphi\frac{\partial\varphi(x,y,t)}{\partial x}+\cos\varphi\frac{\partial\varphi(x,y,t)}{\partial y}\right]\\
&= \text{sen}\varphi\cos\varphi\frac{\partial\varphi(x,y,t)}{\partial x}+\text{sen}^2\varphi\frac{\partial\varphi(x,y,t)}{\partial y}\\
&\quad-\text{sen}\varphi\cos\varphi\frac{\partial\varphi(x,y,t)}{\partial x}+\cos^2\varphi\frac{\partial\varphi(x,y,t)}{\partial y}\\
&= \frac{\partial\varphi(x,y,t)}{\partial y},
\end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial y}\varphi(x,y,t)\right] = \left[\text{sen}\varphi\frac{\partial}{\partial\varrho}+\cos\varphi\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]^2\psi(\varrho,\varphi,t). \tag{16}$$

Logo, usando as Eqs. (15) e (16), podemos escrever:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\varphi(x,y,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi(x,y,t)}{\partial y^2} &= \left[\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varrho}-\text{sen}\varphi\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]^2\psi(\varrho,\varphi,t)\\
&\quad+\left[\text{sen}\varphi\frac{\partial}{\partial\varrho}+\cos\varphi\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]^2\psi(\varrho,\varphi,t)\\
&= \left[\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varrho}-\text{sen}\varphi\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]\left[\cos\varphi\frac{\partial\psi(\varrho,\varphi,t)}{\partial\varrho}-\text{sen}\varphi\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\psi(\varrho,\varphi,t)}{\partial\varphi}\right]\\
&\quad+\left[\text{sen}\varphi\frac{\partial}{\partial\varrho}+\cos\varphi\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]\left[\text{sen}\varphi\frac{\partial\psi(\varrho,\varphi,t)}{\partial\varrho}+\cos\varphi\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\psi(\varrho,\varphi,t)}{\partial\varphi}\right]\\
&= \cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varrho}\left[\cos\varphi\frac{\partial\psi(\varrho,\varphi,t)}{\partial\varrho}\right]-\text{sen}\varphi\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\cos\varphi\frac{\partial\psi(\varrho,\varphi,t)}{\partial\varrho}\right]\\
&\quad-\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varrho}\left[\text{sen}\varphi\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\psi(\varrho,\varphi,t)}{\partial\varphi}\right]+\text{sen}\varphi\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\text{sen}\varphi\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\psi(\varrho,\varphi,t)}{\partial\varphi}\right]\\
&\quad+\text{sen}\varphi\frac{\partial}{\partial\varrho}\left[\text{sen}\varphi\frac{\partial\psi(\varrho,\varphi,t)}{\partial\varrho}\right]+\cos\varphi\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\text{sen}\varphi\frac{\partial\psi(\varrho,\varphi,t)}{\partial\varrho}\right]\\
&\quad+\text{sen}\varphi\frac{\partial}{\partial\varrho}\left[\cos\varphi\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\psi(\varrho,\varphi,t)}{\partial\varphi}\right]+\cos\varphi\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\cos\varphi\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\psi(\varrho,\varphi,t)}{\partial\varphi}\right],
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\varphi(x,y,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi(x,y,t)}{\partial y^2} &= \cos^2\varphi\frac{\partial^2\psi(\varrho,\varphi,t)}{\partial\varrho^2}-\text{sen}\varphi\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\cos\varphi\frac{\partial\psi(\varrho,\varphi,t)}{\partial\varrho}\right]\\
&\quad-\text{sen}\varphi\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varrho}\left[\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\psi(\varrho,\varphi,t)}{\partial\varphi}\right]+\text{sen}\varphi\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\text{sen}\varphi\frac{\partial\psi(\varrho,\varphi,t)}{\partial\varphi}\right]\\
&\quad+\text{sen}^2\varphi\frac{\partial^2\psi(\varrho,\varphi,t)}{\partial\varrho^2}+\cos\varphi\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\text{sen}\varphi\frac{\partial\psi(\varrho,\varphi,t)}{\partial\varrho}\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varrho}\left[\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\psi(\varrho,\varphi,t)}{\partial\varphi}\right]+\cos\varphi\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\cos\varphi\frac{\partial\psi(\varrho,\varphi,t)}{\partial\varphi}\right] \\
= \quad & \frac{\partial^2\psi(\varrho,\varphi,t)}{\partial\varrho^2}-\operatorname{sen}\varphi\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\cos\varphi\frac{\partial\psi(\varrho,\varphi,t)}{\partial\varrho}\right] \\
& +\operatorname{sen}\varphi\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\operatorname{sen}\varphi\frac{\partial\psi(\varrho,\varphi,t)}{\partial\varphi}\right] \\
& +\cos\varphi\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\operatorname{sen}\varphi\frac{\partial\psi(\varrho,\varphi,t)}{\partial\varrho}\right] \\
& +\cos\varphi\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\cos\varphi\frac{\partial\psi(\varrho,\varphi,t)}{\partial\varphi}\right],
\end{aligned}
$$

ou ainda,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2\varphi(x,y,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi(x,y,t)}{\partial y^2} = \quad & \frac{\partial^2\psi(\varrho,\varphi,t)}{\partial\varrho^2}-\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\frac{1}{\varrho}\frac{\partial^2\psi(\varrho,\varphi,t)}{\partial\varphi\partial\varrho} \\
& +\operatorname{sen}^2\varphi\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\psi(\varrho,\varphi,t)}{\partial\varrho} \\
& +\operatorname{sen}^2\varphi\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2\psi(\varrho,\varphi,t)}{\partial\varphi^2}+\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial\psi(\varrho,\varphi,t)}{\partial\varphi} \\
& +\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\frac{1}{\varrho}\frac{\partial^2\psi(\varrho,\varphi,t)}{\partial\varphi\partial\varrho}+\cos^2\varphi\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\psi(\varrho,\varphi,t)}{\partial\varrho} \\
& +\cos^2\varphi\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2\psi(\varrho,\varphi,t)}{\partial\varphi^2}-\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial\psi(\varrho,\varphi,t)}{\partial\varphi} \\
= \quad & \frac{\partial^2\psi(\varrho,\varphi,t)}{\partial\varrho^2}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\psi(\varrho,\varphi,t)}{\partial\varrho}+\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2\psi(\varrho,\varphi,t)}{\partial\varphi^2}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\frac{\partial^2\varphi(x,y,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi(x,y,t)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\psi(\varrho,\varphi,t)}{\partial\varrho^2}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\psi(\varrho,\varphi,t)}{\partial\varrho}+\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2\psi(\varrho,\varphi,t)}{\partial\varphi^2},
$$

que podemos comparar com a parte que não depende de z do caso do laplaciano tridimensional:

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 g(\varrho,\varphi,z) &= \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left[\varrho\frac{\partial g(\varrho,\varphi,z)}{\partial\varrho}\right]+\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 g(\varrho,\varphi,z)}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 g(\varrho,\varphi,z)}{\partial z^2} \\
&= \left[\frac{\partial^2 g(\varrho,\varphi,z)}{\partial\varrho^2}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial g(\varrho,\varphi,z)}{\partial\varrho}+\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 g(\varrho,\varphi,z)}{\partial\varphi^2}\right]+\frac{\partial^2 g(\varrho,\varphi,z)}{\partial z^2},
\end{aligned}
$$

que são iguais.

Separação de variáveis

Agora temos também, quando separamos as variáveis, uma função temporal, além das duas espaciais:

$$
\psi(\varrho,\varphi,t) = R(\varrho)F(\varphi)T(t) \tag{17}
$$

e, portanto, como a equação de onda agora é dada por

$$\frac{\partial^2 \psi(\varrho,\varphi,t)}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \psi(\varrho,\varphi,t)}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 \psi(\varrho,\varphi,t)}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi(\varrho,\varphi,t)}{\partial t^2} = 0,$$

usando a Eq. (17) acima, obtemos:

$$F(\varphi) T(t) \frac{d^2 R(\varrho)}{d\varrho^2} + F(\varphi) T(t) \frac{1}{\varrho}\frac{dR(\varrho)}{d\varrho} + \frac{R(\varrho) T(t)}{\varrho^2}\frac{d^2 F(\varphi)}{d\varphi^2} - \frac{R(\varrho) F(\varphi)}{c^2}\frac{d^2 T(t)}{dt^2} = 0.$$

Dividindo esta equação por $R(\varrho) F(\varphi) T(t)$, dá:

$$\frac{1}{R(\varrho)}\frac{d^2 R(\varrho)}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho R(\varrho)}\frac{dR(\varrho)}{d\varrho} + \frac{1}{\varrho^2 F(\varphi)}\frac{d^2 F(\varphi)}{d\varphi^2} - \frac{1}{c^2 T(t)}\frac{d^2 T(t)}{dt^2} = 0,$$

ou ainda,

$$\frac{1}{R(\varrho)}\frac{d^2 R(\varrho)}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho R(\varrho)}\frac{dR(\varrho)}{d\varrho} + \frac{1}{\varrho^2 F(\varphi)}\frac{d^2 F(\varphi)}{d\varphi^2} = \frac{1}{c^2 T(t)}\frac{d^2 T(t)}{dt^2}.$$

O membro esquerdo desta equação só depende das variáveis independentes ϱ e φ, enquanto que o membro direito só depende da variável t, que é, também, independente das demais. Logo, a única possibilidade para isso é se cada um desses membros for constante. Assim, como estamos falando de membrana vibrante, esperamos que as vibrações não amorteçam com o tempo e usamos um ansatz oscilante para a função dependente do tempo, assim:

$$\frac{1}{c^2 T(t)}\frac{d^2 T(t)}{dt^2} = -k^2,$$

onde $k \in \mathbb{R}$ para que $T(t)$ seja periódica:

$$T(t) = A_T \operatorname{sen}(\omega t) + B_T \cos(\omega t), \tag{18}$$

onde, por hábito, definimos a constante ω como

$$\omega \equiv kc.$$

Agora, usando esta solução na equação acima, obtemos:

$$\frac{1}{R(\varrho)}\frac{d^2 R(\varrho)}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho R(\varrho)}\frac{dR(\varrho)}{d\varrho} + \frac{1}{\varrho^2 F(\varphi)}\frac{d^2 F(\varphi)}{d\varphi^2} = -k^2.$$

Podemos agora multiplicar ambos os membros desta equação por ϱ^2 e segue que

$$\frac{\varrho^2}{R(\varrho)}\frac{d^2 R(\varrho)}{d\varrho^2} + \frac{\varrho}{R(\varrho)}\frac{dR(\varrho)}{d\varrho} + \frac{1}{F(\varphi)}\frac{d^2 F(\varphi)}{d\varphi^2} = -k^2\varrho^2.$$

Rearranjando os termos, esta equação fica:

$$\frac{1}{F(\varphi)}\frac{d^2 F(\varphi)}{d\varphi^2} = -k^2\varrho^2 - \frac{\varrho^2}{R(\varrho)}\frac{d^2 R(\varrho)}{d\varrho^2} - \frac{\varrho}{R(\varrho)}\frac{dR(\varrho)}{d\varrho}.$$

Novamente temos uma equação tal que o membro esquerdo só envolve a variável φ e o membro direito só envolve a variável ϱ. Como estas duas variáveis são mutuamente independentes, cada um dos membros desta equação é igual à mesma constante de separação, que vamos chamar de $-m^2$, onde o sinal de menos é usado porque queremos que a função $F(\varphi)$ seja periódica com período 2π, caso contrário não oberíamos soluções fisicamente aceitáveis. Logo, podemos escrever:

$$\frac{1}{F(\varphi)}\frac{d^2F(\varphi)}{d\varphi^2} = -m^2,$$

isto é,

$$F(\varphi) = A_F \operatorname{sen}(m\varphi) + B_F\cos(m\varphi) \tag{19}$$

e vemos imediatamente que $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ para que $F(\varphi \pm 2\pi) = F(\varphi)$. Veja que é redundante usar $-m$ se já usamos m, pois o uso de $-m$ dá uma solução que é equivalente à solução com m, bastando apenas redefinir uma das constantes arbitrárias para que fiquem idênticas. Portanto, apenas usamos $m = 0, 1, 2, \ldots$ Assim, resta-nos apenas resolver a equação radial, que agora dá:

$$-k^2\varrho^2 - \frac{\varrho^2}{R(\varrho)}\frac{d^2R(\varrho)}{d\varrho^2} - \frac{\varrho}{R(\varrho)}\frac{dR(\varrho)}{d\varrho} = -m^2,$$

isto é,

$$\varrho^2\frac{d^2R(\varrho)}{d\varrho^2} + \varrho\frac{dR(\varrho)}{d\varrho} + k^2\varrho^2R(\varrho) = m^2R(\varrho),$$

ou seja,

$$\varrho^2\frac{d^2R(\varrho)}{d\varrho^2} + \varrho\frac{dR(\varrho)}{d\varrho} + \left(k^2\varrho^2 - m^2\right)R(\varrho) = 0,$$

que, como vimos, é a equação de Bessel cilíndrica de ordem m. Vamos fazer

$$x \equiv k\varrho$$

e a equação radial fica:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + \left(x^2 - m^2\right)y = 0,$$

onde $y \equiv y(x)$ é dada em termos da função radial como

$$y(x) \equiv R(x/k).$$

Vemos, então, que a solução geral da equação de Bessel acima é dada por

$$y(x) = A_RJ_m(x) + B_RY_m(x).$$

Voltando a escrever na variável ϱ, obtemos:

$$\begin{aligned} y(x) &= R(x/k) \\ &= R(\varrho) \\ &= A_RJ_m(k\varrho) + B_RY_m(k\varrho), \end{aligned}$$

isto é, como esta solução depende de m, definimos, então,

$$R_m(\varrho) \equiv A_m(k) J_m(k\varrho) + B_m(k) Y_m(k\varrho),$$

que agora tem o índice m, ou seja, é uma solução geral para cada valor de m. Veja que, por não haver qualquer possível singularidade em $\varrho = 0$, segue que $B_m = 0$ e ficamos com

$$R_m(\varrho) = A_m(k) J_m(k\varrho). \tag{20}$$

Então, substituindo as Eqs. (18), (19) e (20) na Eq. (17), obtemos:

$$\begin{aligned}\psi_m(k;\varrho,\varphi,t) &= A_{R,m}(k) J_m(k\varrho)\left[A_{F,m}(k)\,\mathrm{sen}\,(m\varphi) + B_{F,m}(k)\cos(m\varphi)\right] \\ &\quad \times \left[A_{T,m}(k)\,\mathrm{sen}\,(kct) + B_{T,m}(k)\cos(kct)\right]\end{aligned}$$

e, portanto, a solução geral é dada por

$$\psi(\varrho,\varphi,t) = \sum_{m,k} c_m(k)\,\psi_m(k;\varrho,\varphi,t).$$

Como já sabemos que em $\varrho = a$ a solução tem que se anular, isto é,

$$\psi(a,\varphi,t) = 0 \text{ para } \forall(\varphi,t),$$

segue que temos que ter

$$J_m(ka) = 0.$$

Logo, vemos que ka deve ser tal que seja alguma raiz da função de Bessel, ou seja, escolhemos k dentro do conjunto dado por elementos

$$k_{m,n} \equiv \frac{x_{m,n}}{a},$$

para $n = 1, 2, \ldots$, onde $x_{m,n}$ é o n-ésimo zero da função de Bessel de ordem m. Neste caso, reescrevemos a solução geral acima como:

$$\psi(\varrho,\varphi,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c(k_{m,n})\,\psi_m(k_{m,n};\varrho,\varphi,t),$$

onde

$$c_m(k_{m,n}) \equiv c(k_{m,n}).$$

Agora, como aqui estamos formulando o enunciado do problema como um exemplo, vamos escolher uma condição inicial para $\psi(\varrho,\varphi,t)$, isto é, vamos escolher $\psi(\varrho,\varphi,0)$ tal que

$$\psi(\varrho,\varphi,0) = 5J_0\left(\frac{x_{0,5}}{a}\varrho\right) + 4J_3\left(\frac{x_{3,1}}{a}\varrho\right)\mathrm{sen}\,(3\varphi). \tag{21}$$

Porque a equação de onda é de segunda ordem no tempo, precisamos também da condição inicial para $\partial\psi(\varrho,\varphi,t)/\partial t$ e, para simplificar, aqui vamos escolher

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\psi(\varrho,\varphi,t)\right|_{t=0} = 0.$$

Um exemplo menos trivial seria este:

$$\psi\left(\varrho,\varphi,0\right) = \left(1-\frac{\varrho^{2}}{a^{2}}\right)\exp\left(-\frac{\varrho^{2}}{a^{2}}+\cos^{3}\left(3\varphi\right)\right)$$

e

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\psi\left(\varrho,\varphi,t\right)\right|_{t=0} = 0,$$

mas nós não vamos resolvê-lo aqui por requerer cálculo numérico. Você pode tentar resolvê-lo usando, por exemplo, Mathematica ou Matlab, ou Sage, etc. Mas, aqui, no entanto, vamos resolver o caso mais simples da Eq. (21). Para isso, fazemos $t=0$ na superposição que obtivemos, dando:

$$\begin{aligned}
\psi\left(\varrho,\varphi,0\right) &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}c\left(k_{m,n}\right)\psi_{m}\left(k_{m,n};\varrho,\varphi,0\right)\\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}c\left(k_{m,n}\right)A_{R,m}\left(k_{m,n}\right)B_{T,m}\left(k_{m,n}\right)J_{m}\left(k_{m,n}\varrho\right)\\
&\quad\left[A_{F,m}\left(k_{m,n}\right)\operatorname{sen}\left(m\varphi\right)+B_{F,m}\left(k_{m,n}\right)\cos\left(m\varphi\right)\right]\\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[c\left(k_{m,n}\right)A_{R,m}\left(k_{m,n}\right)A_{F,m}\left(k_{m,n}\right)B_{T,m}\left(k_{m,n}\right)\right]\\
&\quad\times J_{m}\left(k_{m,n}\varrho\right)\operatorname{sen}\left(m\varphi\right)\\
&\quad+\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[c\left(k_{m,n}\right)A_{R,m}\left(k_{m,n}\right)B_{F,m}\left(k_{m,n}\right)B_{T,m}\left(k_{m,n}\right)\right]\\
&\quad\times J_{m}\left(k_{m,n}\varrho\right)\cos\left(m\varphi\right)\\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{c}\left(k_{m,n}\right)J_{m}\left(k_{m,n}\varrho\right)\operatorname{sen}\left(m\varphi\right)\\
&\quad+\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{d}\left(k_{m,n}\right)J_{m}\left(k_{m,n}\varrho\right)\cos\left(m\varphi\right)
\end{aligned}$$

Multiplicando por $\operatorname{sen}\left(p\varphi\right)$ e integrando sobre φ, vem:

$$\int_{0}^{2\pi}d\varphi\operatorname{sen}\left(p\varphi\right)\psi\left(\varrho,\varphi,0\right) = \pi\sum_{n=1}^{\infty}c\left(k_{p,n}\right)A_{R,p}\left(k_{p,n}\right)B_{T,p}\left(k_{p,n}\right)A_{F,p}\left(k_{p,n}\right)J_{p}\left(k_{p,n}\varrho\right).$$

Multiplicando por $\varrho J_{p}\left(k_{p,q}\varrho\right)$ e integrando sobre ϱ de 0 até a, obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{a}d\varrho\,\varrho J_{p}\left(k_{p,q}\varrho\right)\int_{0}^{2\pi}d\varphi\operatorname{sen}\left(p\varphi\right)\psi\left(\varrho,\varphi,0\right) &= \pi\sum_{n=1}^{\infty}c\left(k_{p,n}\right)A_{R,p}\left(k_{p,n}\right)B_{T,p}\left(k_{p,n}\right)\\
&\quad\times A_{F,p}\left(k_{p,n}\right)\int_{0}^{a}d\varrho\,\varrho J_{p}\left(k_{p,q}\varrho\right)J_{p}\left(k_{p,n}\varrho\right)\\
&= \pi\sum_{n=1}^{\infty}c\left(k_{p,n}\right)A_{R,p}\left(k_{p,n}\right)B_{T,p}\left(k_{p,n}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\times A_{F,p}\left(k_{p,n}\right)\delta_{q,n}\int_0^a d\varrho\,\varrho\left[J_p\left(k_{p,q}\varrho\right)\right]^2 \\
= \;&\pi c\left(k_{p,q}\right)A_{R,p}\left(k_{p,q}\right)B_{T,p}\left(k_{p,q}\right) \\
&\times A_{F,p}\left(k_{p,q}\right)\int_0^a d\varrho\,\varrho\left[J_p\left(k_{p,q}\varrho\right)\right]^2,
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
\int_0^a d\varrho\,\varrho J_p\left(k_{p,q}\varrho\right)\int_0^{2\pi}d\varphi\,\mathrm{sen}\left(p\varphi\right)\psi\left(\varrho,\varphi,0\right) = \pi\tilde{c}\left(k_{p,q}\right)\frac{1}{2}\frac{a^4}{x_{p,q}^2}\left[\frac{d}{d\varrho}J_p\left(\frac{x_{p,q}}{a}\varrho\right)\right]^2_{\varrho=a},
$$

onde usamos o resultado de aulas anteriores:

$$
\begin{aligned}
\int_0^a dx\,x\left[J_m\left(\frac{q_{m,p}}{a}x\right)\right]^2 &= \frac{1}{2}\left\{\left(x^2-a^2\frac{\nu^2}{q_{m,p}^2}\right)\left[J_m\left(\frac{q_{m,p}}{a}x\right)\right]^2+a^2\frac{x^2}{q_{m,p}^2}\left[\frac{d}{dx}J_m\left(\frac{q_{m,p}}{a}x\right)\right]^2\right\}\Bigg|_0^a \\
&= \frac{1}{2}\frac{a^4}{q_{m,p}^2}\left[\frac{d}{dx}J_m\left(\frac{q_{m,p}}{a}x\right)\right]^2_{x=a}.
\end{aligned}
$$

Agora, para encontrarmos os coeficientes $\tilde{d}\left(k_{p,q}\right)$, procemos como anteriormente, mas multiplicando por $\cos\left(p\varphi\right)$ e não $\mathrm{sen}\left(p\varphi\right)$:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}d\varphi\,\cos\left(p\varphi\right)\psi\left(\varrho,\varphi,0\right) &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{c}\left(k_{m,n}\right)J_m\left(k_{m,n}\varrho\right)\int_0^{2\pi}d\varphi\,\cos\left(p\varphi\right)\mathrm{sen}\left(m\varphi\right) \\
&\quad+\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{d}\left(k_{m,n}\right)J_m\left(k_{m,n}\varrho\right)\int_0^{2\pi}d\varphi\,\cos\left(p\varphi\right)\cos\left(m\varphi\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{d}\left(k_{p,n}\right)J_p\left(k_{p,n}\varrho\right)\int_0^{2\pi}d\varphi\,\cos^2\left(p\varphi\right) \\
&= \left(1+\delta_{p,0}\right)\pi\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{d}\left(k_{p,n}\right)J_p\left(k_{p,n}\varrho\right).
\end{aligned}
$$

Só falta multiplicar por $\varrho J_p\left(k_{p,q}\varrho\right)$ e integrar de 0 até a:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^a d\varrho\,\varrho J_p\left(k_{p,q}\varrho\right)\int_0^{2\pi}d\varphi\,\cos\left(p\varphi\right)\psi\left(\varrho,\varphi,0\right) = \\
&\left(1+\delta_{p,0}\right)\pi\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{d}\left(k_{p,n}\right)\int_0^a d\varrho\,\varrho J_p\left(k_{p,q}\varrho\right)J_p\left(k_{p,n}\varrho\right),
\end{aligned}
$$

que dá:

$$
\int_0^a d\varrho\,\varrho J_p\left(k_{p,q}\varrho\right)\int_0^{2\pi}d\varphi\,\cos\left(p\varphi\right)\psi\left(\varrho,\varphi,0\right) = \left(1+\delta_{p,0}\right)\pi\tilde{d}\left(k_{p,q}\right)\frac{1}{2}\frac{a^4}{x_{p,q}^2}\left[\frac{d}{d\varrho}J_p\left(\frac{x_{p,q}}{a}\varrho\right)\right]^2_{\varrho=a}.
$$

Note que ainda não achamos os produtos de coeficientes envolvendo o fator $A_{T,m}\left(k\right)$ ao invés de $B_{T,m}\left(k\right)$. Para tanto, procedemos da mesma forma, mas agora usando a condição inicial para a derivada parcial com relação ao tempo em $t=0$, isto é,

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\psi(\varrho,\varphi,t)\right|_{t=0} = 0,$$

dando:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\psi_m(k;\varrho,\varphi,t) &= A_{R,m}(k)\,J_m(k\varrho)\left[A_{F,m}(k)\operatorname{sen}(m\varphi)+B_{F,m}(k)\cos(m\varphi)\right]\\ &\quad\times\left[kcA_{T,m}(k)\cos(kct)-kcB_{T,m}(k)\operatorname{sen}(kct)\right]\end{aligned}$$

e, assim,

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial}{\partial t}\psi_m(\varrho,\varphi,t)\right|_{t=0} &= kcA_{T,m}(k)\,A_{R,m}(k)\,J_m(k\varrho)\left[A_{F,m}(k)\operatorname{sen}(m\varphi)+B_{F,m}(k)\cos(m\varphi)\right]\\ &= 0,\ \forall\varrho,\varphi.\end{aligned}$$

A única solução é, portanto, que

$$A_{T,m}(k) = 0.$$

Juntando tudo em uma única expressão, finalmente, obtemos:

$$\begin{aligned}\psi(\varrho,\varphi,t) &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{c}(k_{m,n})\,J_m(k_{m,n}\varrho)\operatorname{sen}(m\varphi)\cos(k_{m,n}ct)\\ &\quad+\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{d}(k_{m,n})\,J_m(k_{m,n}\varrho)\cos(m\varphi)\cos(k_{m,n}ct),\end{aligned}$$

onde

$$\tilde{c}(k_{p,q}) = \frac{\int_0^a d\varrho\,\varrho J_p(k_{p,q}\varrho)\int_0^{2\pi}d\varphi\operatorname{sen}(p\varphi)\,\psi(\varrho,\varphi,0)}{\frac{\pi}{2}\frac{a^4}{x_{p,q}^2}\left[\frac{d}{d\varrho}J_p\left(\frac{x_{p,q}}{a}\varrho\right)\right]_{\varrho=a}^2}$$

e

$$\tilde{d}(k_{p,n}) = \frac{\int_0^a d\varrho\,\varrho J_p(k_{p,q}\varrho)\int_0^{2\pi}d\varphi\,\cos(p\varphi)\,\psi(\varrho,\varphi,0)}{(1+\delta_{p,0})\frac{\pi}{2}\frac{a^4}{x_{p,q}^2}\left[\frac{d}{d\varrho}J_p\left(\frac{x_{p,q}}{a}\varrho\right)\right]_{\varrho=a}^2}.$$

Usando a função dada,

$$\psi(\varrho,\varphi,0) = 5J_0\left(\frac{x_{0,5}}{a}\varrho\right)+4J_3\left(\frac{x_{3,1}}{a}\varrho\right)\operatorname{sen}(3\varphi),$$

temos:

$$\int_0^a d\varrho\,\varrho J_p(k_{p,q}\varrho)\int_0^{2\pi}d\varphi\operatorname{sen}(p\varphi)\,\psi(\varrho,\varphi,0) =$$

$$
\begin{aligned}
5\int_0^a d\varrho\,\varrho J_p\left(k_{p,q}\varrho\right)J_0\left(\frac{x_{0,5}}{a}\varrho\right)\int_0^{2\pi}d\varphi\,\mathrm{sen}\left(p\varphi\right)&\\
+4\int_0^a d\varrho\,\varrho J_p\left(k_{p,q}\varrho\right)J_3\left(\frac{x_{3,1}}{a}\varrho\right)\int_0^{2\pi}d\varphi\,\mathrm{sen}\left(p\varphi\right)\mathrm{sen}\left(3\varphi\right) &=\\
0&\\
+\delta_{p,3}\delta_{q,1}4\pi\int_0^a d\varrho\,\varrho J_p\left(k_{p,q}\varrho\right)J_3\left(\frac{x_{3,1}}{a}\varrho\right) &=\\
\delta_{p,3}\delta_{q,1}4\pi\int_0^a d\varrho\,\varrho J_3\left(k_{3,1}\varrho\right)J_3\left(\frac{x_{3,1}}{a}\varrho\right) &=\\
\delta_{p,3}\delta_{q,1}4\pi\frac{1}{2}\frac{a^4}{x_{3,1}^2}\left[\frac{d}{d\varrho}J_3\left(\frac{x_{3,1}}{a}\varrho\right)\right]^2_{\varrho=a}&.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\tilde{c}\left(k_{p,q}\right) &= \frac{\delta_{p,3}\delta_{q,1}4x_{3,1}^2\left[\frac{d}{d\varrho}J_3\left(\frac{x_{3,1}}{a}\varrho\right)\right]^2_{\varrho=a}}{x_{3,1}^2\left[\frac{d}{d\varrho}J_3\left(\frac{x_{3,1}}{a}\varrho\right)\right]^2_{\varrho=a}}\\
&= \frac{\delta_{p,3}\delta_{q,1}4x_{3,1}^2\left[\frac{d}{d\varrho}J_3\left(\frac{x_{3,1}}{a}\varrho\right)\right]^2_{\varrho=a}}{x_{3,1}^2\left[\frac{d}{d\varrho}J_3\left(\frac{x_{3,1}}{a}\varrho\right)\right]^2_{\varrho=a}}\\
&= 4\delta_{p,3}\delta_{q,1}.
\end{aligned}
$$

Também temos que calcular a seguinte integral dupla:

$$
\begin{aligned}
\int_0^a d\varrho\,\varrho J_p\left(k_{p,q}\varrho\right)\int_0^{2\pi}d\varphi\,\cos\left(p\varphi\right)\psi\left(\varrho,\varphi,0\right) &=\\
5\int_0^a d\varrho\,\varrho J_p\left(k_{p,q}\varrho\right)J_0\left(\frac{x_{0,5}}{a}\varrho\right)\int_0^{2\pi}d\varphi\,\cos\left(p\varphi\right)&\\
+4\int_0^a d\varrho\,\varrho J_p\left(k_{p,q}\varrho\right)J_3\left(\frac{x_{3,1}}{a}\varrho\right)\int_0^{2\pi}d\varphi\,\cos\left(p\varphi\right)\mathrm{sen}\left(3\varphi\right)&,
\end{aligned}
$$

onde substituímos $\psi\left(\varrho,\varphi,0\right)$ por

$$
\psi\left(\varrho,\varphi,0\right) = 5J_0\left(\frac{x_{0,5}}{a}\varrho\right)+4J_3\left(\frac{x_{3,1}}{a}\varrho\right)\mathrm{sen}\left(3\varphi\right).
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\int_0^a d\varrho\,\varrho J_p\left(k_{p,q}\varrho\right)\int_0^{2\pi}d\varphi\,\cos\left(p\varphi\right)\psi\left(\varrho,\varphi,0\right) &= 10\pi\delta_{p,0}\int_0^a d\varrho\,\varrho J_p\left(k_{p,q}\varrho\right)J_0\left(\frac{x_{0,5}}{a}\varrho\right)\\
&\quad +0\\
&= 10\pi\delta_{p,0}\int_0^a d\varrho\,\varrho J_0\left(\frac{x_{0,q}}{a}\varrho\right)J_0\left(\frac{x_{0,5}}{a}\varrho\right)\\
&= 10\pi\delta_{p,0}\delta_{q,5}\frac{1}{2}\frac{a^4}{x_{0,5}^2}\left[\frac{d}{d\varrho}J_0\left(\frac{x_{0,5}}{a}\varrho\right)\right]^2_{\varrho=a}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\tilde{d}\left(k_{p,q}\right) &= \frac{10\pi\delta_{p,0}\delta_{q,5}\frac{1}{2}\frac{a^4}{x_{0,5}^2}\left[\frac{d}{d\varrho}J_0\left(\frac{x_{0,5}}{a}\varrho\right)\right]_{\varrho=a}^2}{\left(1+\delta_{p,0}\right)\frac{\pi}{2}\frac{a^4}{x_{p,q}^2}\left[\frac{d}{d\varrho}J_p\left(\frac{x_{p,q}}{a}\varrho\right)\right]_{\varrho=a}^2} \\
&= \frac{10\pi\delta_{p,0}\delta_{q,5}\frac{1}{2}\frac{a^4}{x_{0,5}^2}\left[\frac{d}{d\varrho}J_0\left(\frac{x_{0,5}}{a}\varrho\right)\right]_{\varrho=a}^2}{\left(1+\delta_{0,0}\right)\frac{\pi}{2}\frac{a^4}{x_{0,5}^2}\left[\frac{d}{d\varrho}J_0\left(\frac{x_{0,5}}{a}\varrho\right)\right]_{\varrho=a}^2} \\
&= 5\delta_{p,0}\delta_{q,5}.
\end{aligned}
$$

A solução final fica assim:

$$
\begin{aligned}
\psi\left(\varrho,\varphi,t\right) &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}4\delta_{m,3}\delta_{n,1}J_m\left(k_{m,n}\varrho\right)\operatorname{sen}\left(m\varphi\right)\cos\left(k_{m,n}ct\right) \\
&\quad+\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}5\delta_{m,0}\delta_{n,5}J_m\left(k_{m,n}\varrho\right)\cos\left(m\varphi\right)\cos\left(k_{m,n}ct\right) \\
&= 4J_3\left(k_{3,1}\varrho\right)\operatorname{sen}\left(3\varphi\right)\cos\left(k_{3,1}ct\right)+5J_0\left(k_{0,5}\varrho\right)\cos\left(k_{0,5}ct\right).
\end{aligned}
$$