Função de Green

Suponhamos que $\mathcal{L}$ seja um operador diferencial hermitiano no intervalo $[a,b]$. Como vimos, temos autofunções de $\mathcal{L}$ que formam um conjunto completo e que podemos escolher como sendo, cada uma delas, ortogonal a todas as demais. Seja esse conjunto completo dado por $\{\varphi_n;\, n=0,1,2,\dots\}$. Então, por definição,

$$\mathcal{L}\varphi_n(x) = \lambda_n r(x)\varphi_n(x),$$

onde os autovalores λ_n são todos reais e, como sempre neste tópico, $r(x)\in\mathbb{R}$ e $r(x)\geqslant 0\,\forall x\in[a,b]$. Consideremos agora que queiramos resolver a equação diferencial inomogênea

$$\mathcal{L}\psi(x) = f(x)$$

para uma dada função f definida no intervalo $[a,b]$. Como o conjunto de autofunções é completo no intervalo, podemos expandir a função procurada, $\psi(x)$, definida no intervalo com as mesmas condições de contorno que as funções de base, assim:

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x),$$

onde $c_n\in\mathbb{C}$. Para encontrar os coeficientes c_n procedemos substituindo esta expansão de volta na equação diferencial:

$$\mathcal{L}\sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x) = f(x),$$

isto é,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\mathcal{L}\varphi_n(x) = f(x),$$

já que $\mathcal{L}$ é um operador linear, e obtemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\lambda_n r(x)\varphi_n(x) = f(x), \tag{1}$$

pois já sabemos que

$$\mathcal{L}\varphi_n(x) = \lambda_n r(x)\varphi_n(x).$$

Agora multiplicamos a Eq. (1) por $\varphi_m^*(x)$ em ambos os seus membros e integrar no intervalo $[a,b]$:

$$\int_a^b dx\, r(x)\varphi_m^*(x)\sum_{n=0}^{\infty} c_n\lambda_n\varphi_n(x) = \int_a^b dx\,\varphi_m^*(x) f(x),$$

isto é,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\lambda_n\int_a^b dx\, r(x)\varphi_m^*(x)\varphi_n(x) = \int_a^b dx\,\varphi_m^*(x) f(x).$$

Mas, porque escolhemos as funções de base como ortogonais, segue que

$$\int_a^b dx\, r(x)\, \varphi_m^*(x)\, \varphi_n(x) \quad = \quad \delta_{m,n} \int_a^b dx\, r(x)\, \varphi_m^*(x)\, \varphi_m(x)\,.$$

Portanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda_n \delta_{m,n} \int_a^b dx\, r(x)\, \varphi_m^*(x)\, \varphi_m(x) \quad = \quad \int_a^b dx\, \varphi_m^*(x)\, f(x)\,,$$

ou seja,

$$c_m \lambda_m \int_a^b dx\, r(x)\, \varphi_m^*(x)\, \varphi_m(x) \quad = \quad \int_a^b dx\, \varphi_m^*(x)\, f(x)\,,$$

dando

$$c_m \lambda_m \quad = \quad \frac{\int_a^b dx\, \varphi_m^*(x)\, f(x)}{\int_a^b dx\, r(x)\, \varphi_m^*(x)\, \varphi_m(x)}, \tag{2}$$

pois não há como termos $\varphi_m(x) = 0$ porque, por definição, nenhuma autofunção pode ser nula em todo o intervalo dado. Sendo assim, por definição de produto escalar, segue que

$$\int_a^b dx\, r(x)\, \varphi_m^*(x)\, \varphi_m(x) \quad \neq \quad 0.$$

É por isso que pudemos dividir a Eq. (2) por este produto escalar. Agora, λ_m pode ser um autovalor nulo, sem problemas. Neste caso, vemos que a Eq. (2) dá

$$0 \quad = \quad \frac{\int_a^b dx\, \varphi_m^*(x)\, f(x)}{\int_a^b dx\, r(x)\, \varphi_m^*(x)\, \varphi_m(x)},$$

ou seja,

$$\int_a^b dx\, r(x)\, \varphi_m^*(x)\, f(x) \quad = \quad 0$$

e, neste caso, podemos escolher qualquer valor para c_m. Quando isto acontecer, simplesmente escolhemos $c_m = 0$. Quando, porém, $\lambda_m \neq 0$, segue que podemos escrever:

$$c_m \quad = \quad \frac{\int_a^b dx\, \varphi_m^*(x)\, f(x)}{\lambda_m \int_a^b dx\, r(x)\, \varphi_m^*(x)\, \varphi_m(x)}$$

e, assim, temos:

$$\begin{aligned} \psi(x) \quad &= \quad \sum_{m=0}^{\infty} c_m \varphi_m(x) \\ &= \quad \sum_m \frac{\int_a^b dx'\, \varphi_m^*(x')\, f(x')}{\lambda_m \int_a^b dx'\, r(x')\, \varphi_m^*(x')\, \varphi_m(x')} \varphi_m(x)\,, \end{aligned}$$

onde a soma é apenas sobre os m's para os quais $\lambda_m \neq 0$. Podemos reescrever esta expressão assim:

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \int_a^b dx' \left[\sum_m \frac{\varphi_m^*(x')\,\varphi_m(x)}{\lambda_m \int_a^b dx''\, r(x'')\,\varphi_m^*(x'')\,\varphi_m(x'')}\right] f(x') \\ &= \int_a^b dx' G(x,x')\, f(x'),\end{aligned}$$

onde definimos a função de Green assim:

$$G(x,x') \equiv \sum_m \frac{\varphi_m^*(x')\,\varphi_m(x)}{\lambda_m \int_a^b dx''\, r(x'')\,\varphi_m^*(x'')\,\varphi_m(x'')}.$$

Claramente, vemos que

$$\begin{aligned}G^*(x,x') &= \sum_m \frac{\varphi_m(x')\,\varphi_m^*(x)}{\lambda_m \int_a^b dx''\, r(x'')\,\varphi_m^*(x'')\,\varphi_m(x'')} \\ &= G(x',x).\end{aligned}$$

Exemplo: $y'' + y/4 = \mathrm{sen}\,(2x)$, com $y(0) = y(\pi) = 0$

Nesta equação,

$$y'' + \frac{y}{4} = \mathrm{sen}\,(2x),$$

com

$$\begin{aligned}y(0) &= y(\pi) \\ &= 0,\end{aligned}$$

precisamos, primeiro, encontrar as autofunções e autovalores para que esta equação tenha um operador hermitiano. Veja que, neste caso,

$$\mathcal{L} = -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{4}$$

e a equação de autovalores e autofunções fica:

$$\mathcal{L}\chi(x) = \lambda\chi(x),$$

isto é,

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{4}\right)\chi(x) = -\lambda\chi(x).$$

Para tanto, basta que as autofunções satisfaçam

$$\left[\chi_m^*(x)\, p(x)\, \frac{d}{dx}\chi_n(x)\right]_0^\pi = 0,$$

onde, aqui, claramente $p(x) = 1$. Neste exemplo vamos usar $r(x) = 1$ no intervalo $[0, \pi]$. Se nossas autofunções forem tais que

$$\begin{aligned}\chi_m(0) &= \chi_m(\pi) \\ &= 0,\end{aligned}$$

claramente vemos que as condições para que nosso operador seja hermitiano são satisfeitas. A equação de autovalores e autofunções fica assim:

$$\frac{d^2}{dx^2}\chi(x) + \frac{1}{4}\chi(x) = -\lambda\chi(x),$$

isto é,

$$\frac{d^2}{dx^2}\chi(x) = -\left(\lambda + \frac{1}{4}\right)\chi(x),$$

dando, claramente, como soluções gerais:

$$\chi(x) = A\mathrm{sen}\left(\sqrt{\left(\lambda + \frac{1}{4}\right)}x\right) + B\cos\left(\sqrt{\left(\lambda + \frac{1}{4}\right)}x\right).$$

Como o cosseno não se anula em $x = 0$, vemos que $B = 0$ e, com isso, ficamos com

$$\chi(0) = 0.$$

Para que a condição em $x = \pi$ também seja satisfeita, impomos:

$$\begin{aligned}\chi(\pi) &= A\mathrm{sen}\left(\sqrt{\lambda + \frac{1}{4}}\pi\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

e isto ocorre se o argumento do seno for um múltiplo inteiro de π. Logo,

$$\sqrt{\lambda + \frac{1}{4}}\pi = n\pi,$$

isto é,

$$\lambda_n = n^2 - \frac{1}{4}.$$

Veja também que, como o seno é ímpar, escolher $n < 0$ não faz a autofunção diferente daquela com $-n > 0$ e, portanto, basta escolhermos $n = 1, 2, 3, \ldots$ para enumerar todos os possíveis autovalores e correspondentes autofunções que não serão degeneradas. Note que não consideramos $n = 0$ porque aí o seno se anula e não é, por definição, uma autofunção. Logo, temos as seguintes funções ortogonais:

$$\chi_n(x) = A\mathrm{sen}(nx).$$

Vamos verificar que este conjunto é ortogonal e também normalizar as funções escolhendo A adequadamente:

$$\int_0^\pi dx\, \chi_m^*(x)\, \chi_n(x) = |A|^2 \int_0^\pi dx\, \text{sen}(mx)\, \text{sen}(nx)\, .$$

Note que

$$\cos(mx - nx) = \cos(mx)\cos(nx) + \text{sen}(mx)\,\text{sen}(nx)$$

e

$$\cos(mx + nx) = \cos(mx)\cos(nx) - \text{sen}(mx)\,\text{sen}(nx)\, ,$$

de forma que subtraindo a segunda da primeira dá:

$$\text{sen}(mx)\,\text{sen}(nx) = \frac{1}{2}\cos(mx - nx) - \frac{1}{2}\cos(mx + nx)\, .$$

Logo,

$$\int_0^\pi dx\, \text{sen}(mx)\,\text{sen}(nx) = \frac{1}{2}\int_0^\pi dx\, \cos(mx - nx) - \frac{1}{2}\int_0^\pi dx\, \cos(mx + nx)\, .$$

vejamos o que acontece só com uma dessas integrais de cosseno:

$$\int_0^\pi dx\, \cos(mx - nx) = \begin{cases} \pi, & \text{se } m = n, \\ 0, & \text{se } m \neq n. \end{cases}$$

A segunda integral, como não temos autofunções distintas com $n < 0$, não há outra possibilidade exceto

$$\int_0^\pi dx\, \cos(mx + nx) = 0.$$

Portanto, obtemos:

$$\int_0^\pi dx\, \text{sen}(mx)\,\text{sen}(nx) = \frac{\pi}{2}\delta_{m,n},$$

ou seja, para nossas autofunções,

$$\int_0^\pi dx\, \chi_m^*(x)\, \chi_n(x) = |A|^2\, \frac{\pi}{2}\delta_{m,n}.$$

Para que as autofunções sejam normalizadas à unidade, escolhemos A tal que

$$|A|^2\, \frac{\pi}{2} = 1$$

e, assim, uma boa escolha é

$$A = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Com isto, temos agora:

$$\chi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\text{sen}(nx)$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$ e

$$\lambda_n = n^2 - \frac{1}{4}.$$

Não temos um sequer autovalor nulo e, com isso tudo, nossa função de Green fica:

$$\begin{aligned} G(x, x') &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\text{sen}(mx')\sqrt{\frac{2}{\pi}}\text{sen}(mx)}{m^2 - \frac{1}{4}} \\ &= \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(mx')\,\text{sen}(mx)}{m^2 - \frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

Agora podemos encontrar a solução da equação inomogênea acima:

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_a^b dx' G(x, x') f(x') \\ &= \int_0^{\pi} dx' \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(mx')\,\text{sen}(mx)}{m^2 - \frac{1}{4}}\left[-\text{sen}(2x')\right] \\ &= -\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left[\int_0^{\pi} dx'\text{sen}(mx')\,\text{sen}(2x')\right]}{m^2 - \frac{1}{4}}\text{sen}(mx). \end{aligned}$$

Mas, do resultado acima, sabemos que

$$\int_a^b dx'\text{sen}(mx')\,\text{sen}(2x') = \frac{\pi}{2}\delta_{m,2}.$$

Portanto,

$$y(x) = -\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\frac{\pi}{2}\delta_{m,2}}{m^2 - \frac{1}{4}}\text{sen}(mx),$$

ou seja,

$$y(x) = -\frac{1}{4 - \frac{1}{4}}\text{sen}(2x),$$

ou ainda,

$$y(x) = -\frac{4}{15}\text{sen}(2x).$$

Para verificar, fazemos a segunda derivada desta equação dando:

$$y''(x) = \frac{16}{15}\text{sen}(2x)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} -y''(x) - \frac{1}{4}y(x) &= -\frac{16}{15}\operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{4}\left[-\frac{4}{15}\operatorname{sen}(2x)\right] \\ &= -\frac{16}{15}\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{15}\operatorname{sen}(2x) \\ &= -\operatorname{sen}(2x), \end{aligned}$$

que mostra que a equação diferencial inomogênea dada está, de fato, resolvida.