Exemplo: A equação de Laplace quando a fronteira é uma circunferência

Vamos considerar uma circunferência no plano xy centrada na origem. Seja a o raio dessa circunferência. Vamos considerar a equação de Laplace no círculo do plano xy cuja fronteira é a circuferência de raio a centrada na origem. Temos, então, no círculo de raio a centrado na origem que resolver a equação de Laplace bidimensional, isto é,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0.$$

A condição de contorno especifica que, nos pontos da circunferência,

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

a função ϕ deve satisfazer

$$\phi|_{x^2+y^2=a^2} = f(\theta),$$

onde $f(\theta)$ é uma função de θ dada. Aqui, vamos usar $\theta \in [0, 2\pi)$. Mas que θ é esta variável? Claro, estaremos usando coordenadas polares, ou seja,

$$x = r \cos\theta$$

e

$$y = r \mathrm{sen} \theta,$$

pois a nossa simetria é circular no plano. Neste caso, temos que mudar a equação de Laplace acima para as novas coordenadas. Em nossa digressão a respeito dessa mudança para coordenadas polares planas vemos que o laplaciano de uma função $F(r, \theta)$ é dado por

$$\nabla^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}.$$

Agora, então, podemos resolver nosso problema. Vamos usar o método de separação de variáveis com o ansatz seguinte:

$$F(r, \theta) = R(r)\,\Theta(\theta).$$

Substituindo na equação diferencial, obtemos

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}[R(r)\,\Theta(\theta)] + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[R(r)\,\Theta(\theta)] + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}[R(r)\,\Theta(\theta)] = 0,$$

isto é,

$$\Theta(\theta)\frac{\partial^2}{\partial r^2}R(r) + \Theta(\theta)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}R(r) + \frac{1}{r^2}R(r)\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\Theta(\theta) = 0,$$

ou seja,

$$\Theta(\theta)\frac{d^2}{dr^2}R(r) + \Theta(\theta)\frac{1}{r}\frac{d}{dr}R(r) + \frac{1}{r^2}R(r)\frac{d^2}{d\theta^2}\Theta(\theta) = 0.$$

Dividindo toda esta equação por $R(r)\,\Theta(\theta)$ e multiplicando por r^2 segue que

$$\frac{r^2}{R(r)}\frac{d^2}{dr^2}R(r)+\frac{r}{R(r)}\frac{d}{dr}R(r)+\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{d^2}{d\theta^2}\Theta(\theta) = 0.$$

Podemos agora prosseguir à separação das variáveis, escrendo

$$\frac{r^2}{R(r)}\frac{d^2}{dr^2}R(r)+\frac{r}{R(r)}\frac{d}{dr}R(r) = -\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{d^2}{d\theta^2}\Theta(\theta).$$

Assim, como cada membro depende só de uma variável independente distinta, obtemos

$$\frac{r^2}{R(r)}\frac{d^2}{dr^2}R(r)+\frac{r}{R(r)}\frac{d}{dr}R(r) = K$$

e

$$\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{d^2}{d\theta^2}\Theta(\theta) = -K.$$

A solução da equação para θ é periódica com período 2π e, portanto, vamos escolher

$$K = k^2.$$

Então, escrevemos

$$\Theta(\theta) = A\operatorname{sen}(k\theta)+B\cos(k\theta).$$

onde escolhemos $k \geqslant 0$, pois sempre podemos sempre escolher absorver um possível sinal de menos na constante A, que é arbitrária, sem perder a generalidade desta solução para $\Theta(\theta)$.

Precisamos agora resolver a equação radial:

$$\frac{d^2}{dr^2}R(r)+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}R(r) = k^2\frac{1}{r^2}R(r).$$

Vamos, então, para este caso em que, como vimos na nossa digressão recordando a equação de Euler,

$$p_0 = 1$$

e

$$q_0 = -k^2,$$

calcular

$$\alpha_\pm = \frac{p_0-1\pm\sqrt{(1-p_0)^2-4q_0}}{2}.$$

Então, substituindo os valores, temos

$$\begin{aligned}\alpha_\pm &= \frac{\pm\sqrt{4k^2}}{2}\\ &= \pm\sqrt{k^2}\\ &= \pm|k|\end{aligned}$$

e, supondo, sem perda de generalidade, $k \geqslant 0$, vemos que

$$\alpha_{\pm} \quad = \quad \pm k.$$

Nossa solução radial geral fica, portanto,

$$R(r) \quad = \quad C_1 \ln r + C_2,$$

para $k = 0$, já que $\alpha_+ = \alpha_-$ só e somente se $k = 0$. Se, no entanto, $k \neq 0$, segue que

$$R(r) \quad = \quad C_+ r^{-k} + C_- r^k.$$

Como a solução geral deve ser periódica com período 2π, segue que a função

$$\Theta(\theta) \quad = \quad A \mathrm{sen}(k\theta) + B \cos(k\theta)$$

deve também ser periódica com período 2π e, assim,

$$k \quad = \quad 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

já que escolhemos $k \geqslant 0$. Nosso ansatz agora fica indexado por k e escrevemos

$$F_k(r,\theta) \quad = \quad R_k(r)\left[A_k \mathrm{sen}(k\theta) + B_k \cos(k\theta)\right],$$

onde

$$R_0(r) \quad = \quad C_1 \ln r + C_2$$

e

$$R_k(r) \quad = \quad D_{-k} r^{-k} + D_k r^k,$$

para $k = 1, 2, \ldots$ A solução final que queremos encontrar, que vamos expressar em termos de coordenadas esféricas (r,θ), vamos escrever como $\phi(r,\theta)$ e deve satisfazer

$$\phi|_{x^2+y^2=a^2} \quad = \quad f(\theta),$$

isto é,

$$\phi(a,\theta) \quad = \quad f(\theta).$$

Como não especificamos a forma de $f(\theta)$, não podemos supor que nosso ansatz satisfaça a condição de contorno dada para um só dos k's. Logo, façamos a combinação linear

$$\begin{aligned} \phi(r,\theta) \quad &= \quad \sum_{k=0}^{\infty} F_k(r,\theta) \\ &= \quad \sum_{k=0}^{\infty} R_k(r)\left[A_k \mathrm{sen}(k\theta) + B_k \cos(k\theta)\right]. \end{aligned}$$

Primeiro notemos que nosso potencial escalar não pode divergir em $r = 0$, pois não há cargas lá. Sendo assim, vemos que

$$R_0(r) = C_2$$

e

$$R_k(r) = D_k r^k,$$

para $k = 1, 2, 3, \ldots$ Com essa informação, portanto, escrevemos

$$\begin{aligned}\phi(r,\theta) &= \sum_{k=0}^{\infty} R_k(r)\left[A_k \mathrm{sen}(k\theta) + B_k \cos(k\theta)\right] \\ &= C_2 B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} D_k r^k \left[A_k \mathrm{sen}(k\theta) + B_k \cos(k\theta)\right],\end{aligned}$$

ou seja,

$$\phi(r,\theta) = \beta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \left[\alpha_k \mathrm{sen}(k\theta) + \beta_k \cos(k\theta)\right],$$

onde definimos novas constantes arbitrárias em termos das anteriores assim:

$$\alpha_k \equiv D_k A_k,$$

$$\beta_0 \equiv C_2 B_0$$

e

$$\beta_k \equiv D_k B_k,$$

para $k = 1, 2, 3, \ldots$ Logo, nossa condição de contorno agora pode ser imposta desta forma:

$$\beta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a^k \left[\alpha_k \mathrm{sen}(k\theta) + \beta_k \cos(k\theta)\right] = f(\theta),$$

isto é,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a^k \alpha_k \mathrm{sen}(k\theta) + \beta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a^k \beta_k \cos(k\theta) = f(\theta),$$

ou seja,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a^k \alpha_k \mathrm{sen}(k\theta) + \sum_{k=0}^{\infty} a^k \beta_k \cos(k\theta) = f(\theta).$$

A solução, então, será dada pelo que já aprendemos de séries de Fourier, isto é, os coeficientes são dados por

$$a^k \alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\, \mathrm{sen}(k\theta)\, f(\theta)$$

e

$$a^k \beta_k \quad = \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \, \cos(k\theta) \, f(\theta) \, .$$

Logo, temos a solução:

$$\begin{aligned} \phi(r,\theta) \quad &= \quad \beta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \alpha_k \mathrm{sen}(k\theta) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \beta_k \cos(k\theta) \, , \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \phi(r,\theta) \quad &= \quad \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} d\theta' \, f(\theta') \right] + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a} \right)^k \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\theta' \, \mathrm{sen}(k\theta') \, f(\theta') \right] \mathrm{sen}(k\theta) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a} \right)^k \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\theta' \, \cos(k\theta') \, f(\theta') \right] \cos(k\theta) \, . \end{aligned}$$