Exemplo de solução da equação de onda usando série de Fourier

Vamos supor que temos uma corda presa em ambas as extremidades em $x = 0$ e $x = L$ para todo $t \geqslant 0$. Nesta situação, então, temos

$$y(0,t) = 0$$

e

$$y(L,t) = 0.$$

Mas vamos considerar que, em $t = 0$, a corda esteja deslocada de forma que tenha o seguinte perfil inicial:

$$y(x,0) = f(x),$$

com uma função $f(x)$ dada e que seja contínua em $[0, L]$, já que a corda é contínua. Então, o primeiro passo é fazermos a separação de variáveis, como no caso da equação de difusão:

$$y(x,t) = F(x)\,T(t).$$

Substituindo na equação de onda, vemos que

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[F(x)\,T(t)\right] - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[F(x)\,T(t)\right] = 0,$$

isto é,

$$T(t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}F(x) - \frac{F(x)}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}T(t) = 0,$$

ou seja,

$$T(t)\frac{d^2}{dx^2}F(x) - \frac{F(x)}{c^2}\frac{d^2}{dt^2}T(t) = 0.$$

Dividindo tudo por $F(x)\,T(t)$, obtemos

$$\frac{1}{F(x)}\frac{d^2}{dx^2}F(x) - \frac{1}{c^2 T(t)}\frac{d^2}{dt^2}T(t) = 0,$$

isto é,

$$\frac{1}{F(x)}\frac{d^2}{dx^2}F(x) = \frac{1}{c^2 T(t)}\frac{d^2}{dt^2}T(t).$$

Mas isto só pode acontecer para todo x e t independentes se

$$\frac{1}{F(x)}\frac{d^2}{dx^2}F(x) = K$$

e

$$\frac{1}{c^2 T(t)}\frac{d^2}{dt^2}T(t) = K,$$

onde K é uma constante de separação. Como a função é periódica, pois estamos lidando com uma onda, essas equações dão oscilações se $K < 0$ e, para garantir isso, vamos trocar a constante de forma que

$$K = -k^2.$$

Assim,

$$\frac{1}{F(x)} \frac{d^2}{dx^2} F(x) = -k^2$$

e

$$\frac{1}{c^2 T(t)} \frac{d^2}{dt^2} T(t) = -k^2,$$

com $k > 0$, só para simplificar a discussão. As soluções gerais dessas equações são, respectivamente,

$$F(x) = F_s \text{sen}(kx) + F_c \cos(kx)$$

e

$$T(t) = T_s \text{sen}(ckt) + T_c \cos(ckt).$$

Logo, nosso ansatz fica

$$y(x,t) = [F_s \text{sen}(kx) + F_c \cos(kx)] [T_s \text{sen}(ckt) + T_c \cos(ckt)].$$

Vejamos o que esta solução dá em $x = 0$:

$$y(0,t) = F_c [T_s \text{sen}(ckt) + T_c \cos(ckt)].$$

Temos que impor que

$$y(0,t) = 0$$

para todo t. O único jeito para isto acontecer é se

$$F_c = 0.$$

Então,

$$y(x,t) = F_s \text{sen}(kx) [T_s \text{sen}(ckt) + T_c \cos(ckt)].$$

Mas temos que ter, também,

$$y(L,t) = 0,$$

e, portanto, nesse caso,

$$0 = F_s \text{sen}(kL) [T_s \text{sen}(ckt) + T_c \cos(ckt)].$$

Ter esta equação satisfeita para todo t só se tivermos

$$\text{sen}\,(kL) = 0,$$

resultando em

$$kL = n\pi,$$

para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Como o sinal $\pm$ pode sempre ser "absorvido" na redefinição da constante arbitrária e $n = 0$ vai anular $y\,(x,t)$ para todo x e t, segue que

$$k_n = \frac{n\pi}{L},$$

para $n = 1, 2, \ldots$ Então, definimos um conjunto infinito de soluções, cada uma satisfazendo as condições de contorno:

$$y_n\,(x,t) \equiv \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left[S_n \text{sen}\left(c\frac{n\pi}{L}t\right) + C_n \cos\left(c\frac{n\pi}{L}t\right)\right],$$

onde S_n e C_n são constantes a serem determinadas.

Agora vamos aplicar a condição inicial,

$$y\,(x,0) = f\,(x)\,.$$

Se $f\,(x)$ é uma função qualquer satisfazendo

$$f\,(0) = 0$$

e

$$f\,(L) = 0,$$

a menos que seja $C_f \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ para algum $n = 1, 2, \ldots$, com alguma constante $C_f \neq 0$, então não encontramos ainda a solução que procuramos, só com uma das $y_n\,(x,t)$ acima. O que podemos tentar é fazer uma combinação linear das soluções, assim:

$$y\,(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left[S_n \text{sen}\left(c\frac{n\pi}{L}t\right) + C_n \cos\left(c\frac{n\pi}{L}t\right)\right],$$

que deverá satisfazer a condição inicial:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) C_n = f\,(x)\,.$$

Vemos que, então, com nossos conhecimentos sobre séries de Fourier, podemos encontrar todos os coeficientes C_n que vão resolver nosso problema e estes coeficientes são dados por

$$C_n = \frac{2}{L}\int_0^L dx\, \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) f\,(x)\,.$$

Logo, tendo os coeficientes, podemos escrever a solução como

$$y(x,t) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left[S_n \text{sen}\left(c\frac{n\pi}{L}t\right) + C_n \cos\left(c\frac{n\pi}{L}t\right)\right],$$

mas ainda não sabemos os coeficientes S_n. Por quê? Ora, toda vez que tentamos impor a condição inicial, os sen $\left(c\frac{n\pi}{L}t\right)$ que multiplicam os coeficientes S_n dão zero, não importando que valores escolhemos para os S_n. Não encontramos "a" solução do problema, mas infinitas possíveis soluções. É que, para o caso da equação de onda, que é de segunda ordem na derivada temporal, precisamos de duas condições iniciais; precisamos de $\frac{\partial}{\partial t}y(x,t)$ calculada em $t=0$, além de apenas saber o valor de $y(x,0)$. Caso não tenhamos esta informação, as condições iniciais são incompletas e não determinamos "uma" solução para o problema, mas todas as possíveis com os dados que temos. Sendo, assim, vamos impor que, em $t=0$, temos também a condição inicial para a derivada temporal:

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}y(x,t)\right|_{t=0} \;=\; g(x),$$

que, por sua vez, também satisfaz

$$g(0) \;=\; 0$$

e

$$g(L) \;=\; 0.$$

Calculemos, portanto, $\frac{\partial}{\partial t}y(x,t)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}y(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left[S_n \text{sen}\left(c\frac{n\pi}{L}t\right) + C_n \cos\left(c\frac{n\pi}{L}t\right)\right]\right\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\frac{d}{dt}\left[S_n \text{sen}\left(c\frac{n\pi}{L}t\right) + C_n \cos\left(c\frac{n\pi}{L}t\right)\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left[c\frac{n\pi}{L}S_n \cos\left(c\frac{n\pi}{L}t\right) - c\frac{n\pi}{L}C_n \text{sen}\left(c\frac{n\pi}{L}t\right)\right].
\end{aligned}$$

Então,

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}y(x,t)\right|_{t=0} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} c\frac{n\pi}{L}S_n \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

que precisa satisfazer

$$\sum_{n=1}^{\infty} c\frac{n\pi}{L}S_n \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \;=\; g(x).$$

Tudo se passa como se tivéssemos uma série de Fourier para $g(x)$, mas agora com coeficientes dados por

$$D_n \;\equiv\; c\frac{n\pi}{L}S_n,$$

ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = g(x).$$

Já sabemos, portanto, que

$$D_n = \frac{2}{L}\int_0^L dx\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) g(x)$$

e, portanto

$$c\frac{n\pi}{L}S_n = \frac{2}{L}\int_0^L dx\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) g(x),$$

isto é,

$$S_n = \frac{2}{nc\pi}\int_0^L dx\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) g(x).$$

Logo, nossa solução, agora completa, fica:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left[S_n \text{sen}\left(c\frac{n\pi}{L}t\right) + C_n \cos\left(c\frac{n\pi}{L}t\right)\right],$$

onde

$$S_n = \frac{2}{nc\pi}\int_0^L dx\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) g(x)$$

e

$$C_n = \frac{2}{L}\int_0^L dx\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) f(x).$$

Uma propriedade interessante é notarmos o seguinte a respeito de nossa solução. Veja que podemos também escrever nossa solução como

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[S_n \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\text{sen}\left(c\frac{n\pi}{L}t\right) + C_n \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos\left(c\frac{n\pi}{L}t\right)\right].$$

Mas sabemos que

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\alpha\text{sen}\beta$$

e

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \text{sen}\alpha\text{sen}\beta,$$

que dão

$$\text{sen}\alpha\text{sen}\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta),$$

implicando, portanto, que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\operatorname{sen}\left(c\frac{n\pi}{L}t\right) = \frac{1}{2}\cos\left[\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right]-\frac{1}{2}\cos\left[\frac{n\pi}{L}(x+ct)\right].$$

Analogamente, também sabemos que

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\beta\cos\alpha$$

e

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\beta\cos\alpha,$$

que dão

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\alpha-\beta)+\frac{1}{2}\operatorname{sen}(\alpha+\beta),$$

implicando, portanto, que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos\left(c\frac{n\pi}{L}t\right) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left[\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right]+\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left[\frac{n\pi}{L}(x+ct)\right].$$

Logo, nossa solução pode também ser escrita como

$$\begin{aligned} y(x,t) &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}S_n\left\{\cos\left[\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right]-\cos\left[\frac{n\pi}{L}(x+ct)\right]\right\} \\ &\quad +\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}C_n\left\{\operatorname{sen}\left[\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right]+\operatorname{sen}\left[\frac{n\pi}{L}(x+ct)\right]\right\}, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} y(x,t) &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{C_n\operatorname{sen}\left[\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right]+S_n\cos\left[\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right]\right\} \\ &\quad +\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{C_n\operatorname{sen}\left[\frac{n\pi}{L}(x+ct)\right]-S_n\cos\left[\frac{n\pi}{L}(x+ct)\right]\right\}. \end{aligned}$$