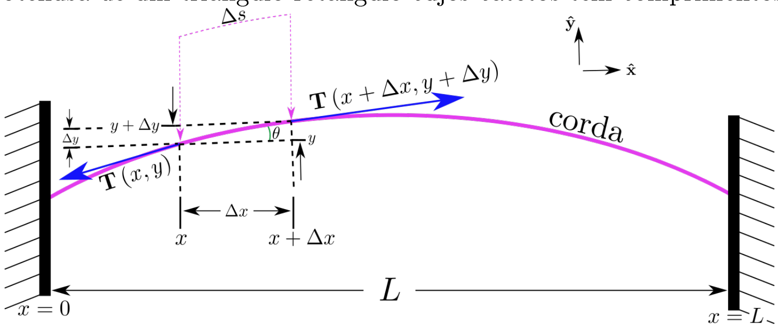
A equação de onda

A figura a seguir ilustra uma corda e um trecho da corda de comprimento Δs. Esse comprimento é aproximadamente a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos têm comprimentos Δx e Δy, como mostra a figura. A corda está



fixa em suas extremidades e podemos, por exemplo no caso de um violão, "tocar" essa corda. Vai haver vibrações que vão ser propagadas ao longo da corda em forma de ondas. O trecho de comprimento Δs vai subir e descer ao longo do eixo y. Nos extremos desse trecho de corda temos o valor da tensão, que é tangente em cada ponto da corda, sendo diferente e magnitude, sentido e direção, como indicado na figura. Vamos desprezar deslocamentos ao longo do eixo x e considerar que só há movimento ao longo do eixo y, pois a corda é presa nos pontos $x = 0$ e $x = L$ e nestes pontos também não há deslocamento ao longo do eixo y.

A força total resultante é dada por

$$\mathbf{F} \quad = \quad \mathbf{T}\left(x + \Delta x, y + \Delta y\right) + \mathbf{T}\left(x, y\right).$$

Precisamos agora determinar as tensões nos extremos do trecho de comprimento Δs. Para isso vamos calcular o versor tangente à corda em cada ponto (x, y). Para isso, vamos tomar o comprimento da corda medido a partir do extremo à direita onde a corda está fixa. Seja s o comprimento que cresce à medida que caminhamos ao longo da corda a partir desse ponto fixo à esquerda. Então, podemos dizer que um ponto qualquer sobre a corda é dado por coordenadas x e y que dependem do comprimento s e assim, escrevemos o vetor posição da corda como

$$\mathbf{r}\left(s\right) \quad = \quad \hat{\mathbf{x}} x\left(s\right) + \hat{\mathbf{y}} y\left(s\right),$$

onde $\hat{\mathbf{x}}$ e $\hat{\mathbf{y}}$ são os vesores ao longo dos sentidos positivos dos eixos x e y, respectivamente, como mostra a figura. Se tomarmos a derivada

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} \quad = \quad \hat{\mathbf{x}}\frac{dx}{ds} + \hat{\mathbf{y}}\frac{dy}{ds},$$

vemos que

$$\begin{aligned} \left|\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right| &= \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2} \\ &= \frac{1}{ds}\sqrt{\left(dx\right)^2 + \left(dy\right)^2} \\ &= \frac{1}{ds}ds \\ &= 1. \end{aligned}$$

Logo, $d\mathbf{r}/ds$ é um versor. Olhando a figura vemos que o ângulo θ é a direção tangente à corda no ponto (x, y). E, como vemos na figura, a tangente desse ângulo dá, aproximadamente,

$$\mathrm{tg}\theta \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

No limite em que Δx vai a zero, o que temos é

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{dy}{dx}$$

e, parametrizando a curva descrita pela corda em termos do comprimento s, podemos também escrever

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{1}{\left(\frac{dx}{ds}\right)}\left(\frac{dy}{ds}\right).$$

Então, um versor tangente à corda, $\hat{\mathbf{t}}$, tem que ter uma componente que é $\cos\theta$ ao longo de x e $\mathrm{sen}\theta$ ao longo de y, isto é,

$$\hat{\mathbf{t}} = \hat{\mathbf{x}}\cos\theta + \hat{\mathbf{y}}\mathrm{sen}\theta.$$

A partir da expressão da tangente acima vemos que

$$\cos\theta\frac{dy}{ds} = \mathrm{sen}\theta\frac{dx}{ds}.$$

Elevando ao quadrado dá

$$\cos^2\theta\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = \mathrm{sen}^2\theta\left(\frac{dx}{ds}\right)^2,$$

ou seja,

$$\cos^2\theta\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = \left(1-\cos^2\theta\right)\left(\frac{dx}{ds}\right)^2,$$

ou ainda,

$$\cos^2\theta\left[\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right] = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2.$$

como vimos acima,

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right) = 1$$

e, então,

$$\cos\theta = \frac{dx}{ds}.$$

Como

$$\cos\theta\frac{dy}{ds} = \mathrm{sen}\theta\frac{dx}{ds},$$

obtemos

$$\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds} = \operatorname{sen}\theta \frac{dx}{ds}$$

e, então,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{dy}{ds}.$$

Com isso, podemos ver que

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{t}} &= \hat{\mathbf{x}}\frac{dx}{ds} + \hat{\mathbf{y}}\frac{dy}{ds} \\ &= \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} \end{aligned}$$

e note que

$$\hat{\mathbf{t}} = \hat{\mathbf{t}}(s).$$

A tensão no extremo esquerdo do elemento de corda de comprimento Δs é dada por

$$\mathbf{T}(x,y) = -\hat{\mathbf{t}}(s)\,\tau(s),$$

onde $\tau(s)$ é o módulo de $\mathbf{T}(x,y)$, já explicitando o fato de serem x e y funções de s. No extremo direito, a tensão é dada por

$$\mathbf{T}(x+\Delta x, y+\Delta y) = \hat{\mathbf{t}}(s+\Delta s)\,\tau(s+\Delta s).$$

No entanto, a magnitude da tensão ao longo de toda a corda deve ser a mesma. Caso não seja, a corda será rompida. Portanto,

$$\begin{aligned} \tau(s+\Delta s) &= \tau(s) \\ &= \tau_0. \end{aligned}$$

Quando o comprimento em consideração tende a zero, podemos aproximar

$$\hat{\mathbf{t}}(s+\Delta s) \approx \hat{\mathbf{t}}(s) + \frac{d\hat{\mathbf{t}}(s)}{ds}\Delta s.$$

A força resultante, portanto, dá

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{T}(x+\Delta x, y+\Delta y) + \mathbf{T}(x,y) \\ &\approx \tau_0\left[\hat{\mathbf{t}}(s) + \frac{d\hat{\mathbf{t}}(s)}{ds}\Delta s\right] - \tau_0\hat{\mathbf{t}}(s) \\ &= \tau_0\frac{d\hat{\mathbf{t}}(s)}{ds}\Delta s. \end{aligned}$$

Mas, da segunda lei de Newton,

$$\mathbf{F} = \Delta m\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2},$$

onde $\mathbf{R}$ é a posição do centro de massa do elemento de corda de comprimento Δs e

$$\Delta m = \lambda \Delta s$$

é o elemento de massa do pedaço de corda de comprimento Δs, com λ sendo a densidade linear de massa da corda, suposta constante ao longo de todo o comprimento da corda. Logo,

$$\Delta m \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} \approx \tau_0 \frac{d\hat{\mathbf{t}}(s)}{ds} \Delta s,$$

ou seja,

$$\lambda \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} \approx \tau_0 \frac{d\hat{\mathbf{t}}(s)}{ds}.$$

Neste momento vamos reparametrizar a curva descrita pela corda. Vamos, ao invés de usar o comprimento da corda como parâmetro, usar a própria coordenada x. Isto é, vamos tomar $x = x(s)$ e inverter essa equação para escrever $s = s(x)$. Como os pontos extremos da corda ao longo do eixo x são fixos e o movimento ao longo da corda é transversal, isto é, ao longo do eixo y, cada ponto da corda de coordenadas (x, y) tem só y variando no tempo, enquando x fica aproximadamente constante. Sendo assim, podemos escrever

$$y = y(x,t)$$

e reescrever a equação de movimento acima como sendo a equação de movimento para y. Então,

$$\mathbf{R} \approx \hat{\mathbf{x}} x + \hat{\mathbf{y}} y(x,t),$$

já que quando Δs tender a zero o centro de massa vai coincidir com o ponto (x, y). Como vamos tomar x constante e y pode depender de x, a derivada temporal de $\mathbf{R}$ que aparece na equação de movimento é, neste caso, para cada ponto especificado pela coordenada x, uma derivada parcial, isto é,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} &\rightarrow \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial t^2} \\ &\approx \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x,t). \end{aligned}$$

Então, a segunda lei de Newton agora fica

$$\lambda \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x,t) \approx \tau_0 \frac{d\hat{\mathbf{t}}(s)}{ds}.$$

Precisamos trocar a parametrização no segundo membro da equação de movimento de s para x. Assim, pensando que $s = s(x)$, segue da definição de elemento de comprimento que

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \\ &= dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \end{aligned}$$

e, lembrando que y agora é função de x e de t, temos que usar

$$\frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{\partial y}{\partial x},$$

ou seja,

$$ds = dx\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}.$$

Por sua vez,

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{t}} &= \hat{\mathbf{x}}\frac{dx}{ds}+\hat{\mathbf{y}}\frac{dy}{ds}\\ &= \hat{\mathbf{x}}\frac{1}{\left(\frac{ds}{dx}\right)}+\hat{\mathbf{y}}\frac{dy}{dx\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}}\\ &\to \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}}\left(\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}\frac{\partial y}{\partial x}\right)\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{t}} &= \hat{\mathbf{t}}\left(x,t\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}}\left(\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}\frac{\partial y}{\partial x}\right).\end{aligned}$$

Como queremos agora $d\hat{\mathbf{t}}\left(s\right)/ds$, escrevemos

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\mathbf{t}}\left(s\right)}{ds} &= \frac{\partial\hat{\mathbf{t}}\left(s\right)}{\partial x}\frac{1}{\frac{ds}{dx}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}}\frac{\partial\hat{\mathbf{t}}\left(x,t\right)}{\partial x}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}}\left(\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right].\end{aligned}$$

Esta expressão ficou muito complexa. Além disso, podemos pensar que para amplitudes de vibração da corda muito pequenas θ é próximo de zero e, assim,

$$\text{sen}\theta \approx \theta$$

enquanto que

$$\cos\theta \approx 1.$$

Mas,

$$\cos\theta = \frac{dx}{ds},$$

ou seja,

$$\frac{1}{\frac{ds}{dx}} \approx 1,$$

ou ainda,

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}} \approx 1.$$

Usando esta aproximação,

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{\mathbf{t}}(s)}{ds} &= \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}} \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}}\left(\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right] \\
&\approx \frac{\partial}{\partial x}\left(\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}\frac{\partial y}{\partial x}\right) \\
&= \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}
\end{aligned}$$

e a equação de movimento agora fica

$$\lambda\hat{\mathbf{y}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}y(x,t) \approx \tau_0\hat{\mathbf{y}}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Portanto, encontramos a equação de onda unidimensional

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0,$$

onde definimos a constante com dimensão de velocidade

$$c \equiv \sqrt{\frac{\tau_0}{\lambda}}.$$

Em três dimensões espaciais, por exemplo, a equação de onda pode ser deduzida analogamente e o resulta dá

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0,$$

onde aqui, c vai depender do meio por onde as ondas se propagam. Note que o operador diferencial $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é chamado de operador laplaciano e também simbolizado como

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Com esta notação, a equação de onda também se escreve assim:

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0.$$