A equação de difusão de calor

Agora que estudamos a teoria da série de Fourier, vamos voltar a seguir o exemplo dado no livro-texto e supor que temos um fio de comprimento L, cujas seções transversais dos extremos do fio estejam, respectivamente, em $x = 0$ e em $x = L$. Além disso, vamos supor que, em $t = 0$,

$$T(x,0) = f(x),$$

onde $f(x)$ é uma função contínua e suave definida no fio, satisfazendo

$$f(0) = 0$$

e

$$f(L) = 0.$$

E, para finalizar o enunciado deste exemplo, também supomos que

$$T(0,t) = 0$$

e

$$T(L,t) = 0,$$

para todo $t > 0$. Calculemos $T(x,t)$ para $x \in [0,L]$ e $t > 0$. Assim, o problema é o de encontrar a solução da equação de difusão de calor,

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2},$$

com condição inicial

$$T(x,0) = f(x)$$

e, também, com as condições de contorno

$$T(0,t) = 0$$

e

$$T(L,t) = 0.$$

O método de separação de variáveis consiste em um ansatz, isto é, um "chute", para o tipo de função $T(x,t)$ que satisfaz a equação diferencial parcial acima da seguinte forma:

$$T(x,t) = F(x)G(t),$$

onde $F(x)$ é uma função que só depende de x e $G(t)$ é uma função que só depende de t. Substituindo este ansatz na equação diferencial acima, vemos que

$$\frac{\partial}{\partial t}[F(x)G(t)] = D\frac{\partial^2}{\partial x^2}[F(x)G(t)],$$

isto é,

$$F(x)\frac{\partial}{\partial t}G(t) \quad = \quad DG(t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}F(x),$$

ou seja,

$$F(x)\frac{d}{dt}G(t) \quad = \quad DG(t)\frac{d^2}{dx^2}F(x).$$

Dividindo esta equação por $F(x)G(t)$, obtemos

$$\frac{1}{G(t)}\frac{d}{dt}G(t) \quad = \quad \frac{D}{F(x)}\frac{d^2}{dx^2}F(x).$$

Isto é, seja a função só de t

$$\mathscr{F}_{tempo}(t) \quad \equiv \quad \frac{1}{G(t)}\frac{d}{dt}G(t)$$

e a seja a função só de x

$$\mathscr{F}_{posição}(x) \quad \equiv \quad \frac{D}{F(x)}\frac{d^2}{dx^2}F(x).$$

A igualdade acima afirma que, para todos os valores possíveis de t e todos os valores possíveis de x, que são variáveis independentes uma da outra, temos

$$\mathscr{F}_{tempo}(t) \quad = \quad \mathscr{F}_{posição}(x).$$

Se, por exemplo, fixamos $t = 3$, teremos um valor $\mathscr{F}_{tempo}(3)$, que é fixo, no primeiro membro e a equação agora fica, para todo valor de x,

$$\mathscr{F}_{posição}(x) \quad = \quad \mathscr{F}_{tempo}(3).$$

Logo, $\mathscr{F}_{posição}(x)$ é uma constante. E, por argumento simétrico, concluímos que $\mathscr{F}_{tempo}(t)$ é igual à mesma constante.

Como no primeiro membro temos uma função que só depende de t e no segundo membro temos uma outra função que só depende de x, por serem x e t variáveis que não dependem uma da outra, isto é, variáveis independentes entre si, podemos ver que, para cada t, se fixamos x, o primeiro membro da equação é constante. E, vice-versa, para cada x, fixando t, vemos que o segundo membro da equação é constante. E, como ambos os membros são iguais entre si, segue que há apenas uma constante, ou seja,

$$\frac{1}{G(t)}\frac{d}{dt}G(t) \quad = \quad K,$$

isto é,

$$\frac{d}{dt}G(t) \quad = \quad KG(t),$$

e

$$\frac{D}{F(x)}\frac{d^2}{dx^2}F(x) = K,$$

ou seja,

$$\frac{d^2}{dx^2}F(x) = \frac{K}{D}F(x),$$

onde K é essa constante, chamada de constante de separação. Resolvendo a primeira destas equações dá uma exponencial,

$$G(t) = G_0 \exp(Kt),$$

onde G_0 é uma constante de integração. A segunda destas equações, em x, teria soluções periódicas como combinações lineares de senos e cossenos caso $K < 0$, já que $D > 0$, empiricamente. E, de fato, como temos que impor

$$T(0,t) = 0$$

e

$$T(L,t) = 0,$$

estamos à procura de soluções periódicas. Sendo assim, vamos escolher $K < 0$ e, para facilitar, vamos usar

$$K \equiv -k^2,$$

com $k > 0$. Com isso, a solução geral para $F(x)$ fica

$$F(x) = a\cos\left(\frac{k}{\sqrt{D}}x\right) + b\mathrm{sen}\left(\frac{k}{\sqrt{D}}x\right),$$

com a e b constantes a ser determinadas pela imposição das condições de contorno. Logo, podemos escrever nossa solução tentativa como

$$\begin{aligned} T(x,t) &= F(x)\,G(t) \\ &= aG_0\exp\left(-k^2t\right)\cos\left(\frac{k}{\sqrt{D}}x\right) + bG_0\exp\left(-k^2t\right)\mathrm{sen}\left(\frac{k}{\sqrt{D}}x\right). \end{aligned}$$

Para $x = 0$, impomos que $T(0,t)$ se anula, isto é,

$$aG_0\exp\left(-k^2t\right) = 0,$$

resultando que

$$a = 0.$$

Logo,

$$T(x,t) = bG_0 \exp\left(-k^2 t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{k}{\sqrt{D}}x\right).$$

Além disso, para $x = L$, impomos que $T(L,t)$ se anula, ou seja,

$$bG_0 \exp\left(-k^2 t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{k}{\sqrt{D}}L\right) = 0.$$

Como esta equação deve valer para todo t, segue que

$$\frac{k}{\sqrt{D}}L = n\pi,$$

ou ainda,

$$k = n\frac{\pi\sqrt{D}}{L},$$

para $n = 0, 1, 2, \ldots$ Portanto,

$$T_n(x,t) = bG_0 \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 D}{L^2}t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Como para $n = 0$ esta solução se anula, excluímos o caso $n = 0$ e então teremos as condições de contorno satisfeitas não trivialmente para $n = 1, 2, 3, \ldots$ Notemos que soluções com n's negativos são linearmente dependentes das respectivas soluções com $-n$'s e, assim, excluímos essa redundância.

Resta agora impormos a condição inicial, isto é,

$$T(x,0) = f(x).$$

Como $f(x)$ não precisa ser dada proporcional a um seno do tipo $\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$, temos problema com a solução acima. O que fazemos, então, é tentar uma superposição de soluções com diferentes n's e respectivos coeficientes:

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 D}{L^2}t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Em $t = 0$, impomos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x).$$

Como podemos encontrar os infinitos coeficientes c_n agora? E uma resposta é usando a teoria da série de Fourier.

Vemos assim que basta usarmos o que aprendemos sobre séries de Fourier e encontrar os coeficientes c_n com a expressão

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_0^L dx \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right) = \int_0^L dx \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right) f(x).$$

Só para relembrar e verificar se isto funciona mesmo, notemos que

$$\cos\left(m\frac{\pi}{L}x - n\frac{\pi}{L}x\right) = \cos\left(m\frac{\pi}{L}x\right)\cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right) + \operatorname{sen}\left(m\frac{\pi}{L}x\right)\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right)$$

e

$$\cos\left(m\frac{\pi}{L}x + n\frac{\pi}{L}x\right) = \cos\left(m\frac{\pi}{L}x\right)\cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right) - \operatorname{sen}\left(m\frac{\pi}{L}x\right)\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right).$$

Subtraindo a segunda destas duas equações da primeira dá

$$\operatorname{sen}\left(m\frac{\pi}{L}x\right)\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right) = \frac{1}{2}\cos\left(m\frac{\pi}{L}x - n\frac{\pi}{L}x\right) - \frac{1}{2}\cos\left(m\frac{\pi}{L}x + n\frac{\pi}{L}x\right).$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_0^L dx\operatorname{sen}\left(m\frac{\pi}{L}x\right)\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right) &= \frac{1}{2}\int_0^L dx\ \cos\left(m\frac{\pi}{L}x - n\frac{\pi}{L}x\right) \\ &\quad -\frac{1}{2}\int_0^L dx\ \cos\left(m\frac{\pi}{L}x + n\frac{\pi}{L}x\right) \\ &= \frac{L}{2}\delta_{m,n} - \frac{L}{2}\delta_{m,-n}.\end{aligned}$$

Mas como estamos apenas com $m, n > 0$, segue que

$$\int_0^L dx\operatorname{sen}\left(m\frac{\pi}{L}x\right)\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right) = \frac{L}{2}\delta_{m,n}.$$

Então,

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_0^L dx\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right) = \int_0^L dx\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right) f(x)$$

fica

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{L}{2}\delta_{m,n} = \int_0^L dx\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right) f(x),$$

ou seja,

$$c_m = \frac{2}{L}\int_0^L dx\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right) f(x).$$

Se olharmos a resposta do exemplo do livro-texto, veremos que as respostas concordam. Pronto, a solução completa é

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 D}{L^2}t\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

com

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L dx\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) f(x).$$

Outro exemplo: quando $T(L,t) = T_0 \neq 0$

Vamos tentar usar o que fizemos acima para o caso em que temos um fio de comprimento L, cujas seções transversais dos extremos do fio estejam, respectivamente, em $x = 0$ e em $x = L$. Para não confundir com o resultado anterior, que queremos relacionar com o problema que vamos resolver agora, usaremos, ao invés de T para a temperatura, $\tau = \tau(x,t)$. Assim, a equação de difusão agora é escrita

$$\frac{\partial \tau(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \tau(x,t)}{\partial x^2}.$$

Além disso, vamos supor que, em $t = 0$,

$$\tau(x,0) = g(x),$$

onde $g(x)$ é uma função contínua e suave definida no fio, satisfazendo

$$g(0) = 0$$

e

$$g(L) = T_0 \neq 0.$$

E, para finalizar o enunciado deste exemplo, também supomos que

$$\tau(0,t) = 0$$

e

$$\tau(L,t) = T_0,$$

para todo $t > 0$.

Nesse caso, notamos que a função do tempo $\tau(L,t)$ é dada por uma translação da função $T(L,t)$ do problema anterior, isto é,

$$\tau(L,t) = T(L,t) + T_0.$$

E, também vemos que

$$g(L) = f(L) + T_0,$$

já que, inevitavelmente, por consistência, temos que ter sempre

$$g(L) = \tau(L,0)$$

da mesma forma que tínhamos

$$f(L) = T(L,0)$$

e como

$$\tau(L,t) = T(L,t) + T_0$$

para todo t, segue que

$$\tau(L,0) = T(L,0) + T_0$$

e, portanto,

$$g(L) = f(L) + T_0.$$

Outra coisa que notamos é que se somarmos uma função linear a $T(x,t)$, como por exemplo em

$$T(x,t) + ax + b,$$

com a e b constantes, também teremos que

$$\frac{\partial T(x,t) + ax + b}{\partial t} = \frac{\partial T(x,t)}{\partial t}$$

e

$$\frac{\partial^2 T(x,t) + ax + b}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}.$$

Então, podemos definir

$$\tau(x,t) = T(x,t) + ax + b$$

e impor

$$\tau(0,t) = 0$$

e

$$\tau(L,t) = T_0,$$

para todo $t > 0$, obtendo

$$a = \frac{T_0}{L}$$

e

$$b = 0,$$

ou seja,

$$\tau(x,t) = T(x,t) + \frac{T_0}{L}x.$$

Notemos que se usarmos nossa solução anterior para $T(x,t)$, então, como acabamos de ver, nossa nova solução $\tau(x,t)$ também satisfaz a equação de difusão

$$\frac{\partial \tau(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \tau(x,t)}{\partial x^2}.$$

Além disso, vemos que as condições de contorno para $\tau(x,t)$ estão satisfeitas com essa definição, pois

$$\begin{aligned}\tau(0,t) &= T(0,t) + \frac{T_0}{L}0 \\ &= 0\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\tau(L,t) &= T(L,t) + \frac{T_0}{L}L \\ &= T_0.\end{aligned}$$

Só temos agora é que impor a condição inicial nova. O que precisamos notar é que a única condição para a condição inicial do problema anterior é que $f(x)$ tinha que ser nula nos extremos $x=0$ e $x=L$. Temos, portanto, para poder utilizar o resultado anterior neste problema para $\tau(x,t)$, usar $f(x)$ relacionada com nossa atual $g(x)$ de forma que $f(x)$ se anule em $x=0$ e $x=L$ enquanto $g(0)=0$ e $g(L)=T_0$. Para isso basta só trocarmos $f(x)$ na solução $T(x,t)$ por $g(x)-T_0x/L$. Com isso, temos

$$\tau(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 D}{L^2}t\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \frac{T_0}{L}x,$$

com

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L dx\,\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left[g(x) - \frac{T_0}{L}x\right].$$

Notemos que quando $t=0$ segue que

$$\tau(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \frac{T_0}{L}x,$$

com

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L dx\,\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left[g(x) - \frac{T_0}{L}x\right].$$

A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

é justamente, pela expressão de c_n acima, a série de Fourier de

$$g(x) - \frac{T_0}{L}x,$$

isto é,

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = g(x) - \frac{T_0}{L}x.$$

Portanto, vemos que

$$\begin{aligned}\tau(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \frac{T_0}{L}x \\ &= g(x) - \frac{T_0}{L}x + \frac{T_0}{L}x,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\tau(x,0) = g(x),$$

como deve ser.