Exemplo (Boyce et al): problema 10.3.15 (p. 613) (continuação)

O truque agora é testar se a solução particular também tem período 2π e que é dada por

$$y_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{c}_n \exp(int).$$

As derivadas dão

$$y_p'(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} in\tilde{c}_n \exp(int)$$

e

$$y_p''(t) = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2\tilde{c}_n \exp(int).$$

Substituindo na Eq. (**??**), obtemos

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(-k^2+\omega^2\right)\tilde{c}_k \exp(ikt) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4\text{sen}\left[(2n-1)t\right]}{\pi(2n-1)},$$

isto é,

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(-k^2+\omega^2\right)\tilde{c}_k \cos(kt) + i\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(-k^2+\omega^2\right)\tilde{c}_k \text{sen}(kt) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4\text{sen}\left[(2n-1)t\right]}{\pi(2n-1)}.$$

Por causa da independência linear das funções seno e cosseno, vemos que, necessariamente,

$$\tilde{c}_{-k} = -\tilde{c}_k$$

e os k's têm que ser ímpares. Com isso,

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{c}_n \exp(int) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \tilde{c}_n \exp(int) + \tilde{c}_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \tilde{c}_n \exp(int) \\ &= \sum_{n=+\infty}^{+1} \tilde{c}_{-n} \exp(-int) + \sum_{n=1}^{+\infty} \tilde{c}_n \exp(int) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\sum_{n=+\infty}^{+1} \tilde{c}_n \exp\left(-int\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \tilde{c}_n \exp\left(int\right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} 2i\tilde{c}_n \mathrm{sen}\left(nt\right)
\end{aligned}
$$

com

$$
y_p''\left(t\right) = -\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 2i\tilde{c}_k \mathrm{sen}\left(kt\right).
$$

Usando novamente a Eq. (**??**), com essas novas expressões, vem

$$
\sum_{k=1}^{+\infty} \left(-k^2+\omega^2\right) 2i\tilde{c}_k \mathrm{sen}\left(kt\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4\mathrm{sen}\left[\left(2n-1\right)t\right]}{\pi\left(2n-1\right)}.
$$

Porque as funções $\mathrm{sen}\left(kt\right)$ com k's pares são linearmente independentes das funções $\mathrm{sen}\left(kt\right)$ com k's ímpares, segue que

$$
\tilde{c}_k = 0
$$

para todos os k's pares. Logo, só não são nulos os k's ímpares e, identificando os coeficentes dos membros esquerdo e direito da equação acima, vemos que

$$
\left[-\left(2n-1\right)^2+\omega^2\right] 2i\tilde{c}_{2n-1} = \frac{4}{\pi\left(2n-1\right)},
$$

ou seja,

$$
2i\tilde{c}_{2n-1} = \frac{4}{\pi\left(2n-1\right)\left[-\left(2n-1\right)^2+\omega^2\right]}.
$$

Como

$$
y_p\left(t\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} 2i\tilde{c}_{2k-1} \mathrm{sen}\left[\left(2k-1\right)t\right],
$$

segue que

$$
y_p\left(t\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4\mathrm{sen}\left[\left(2k-1\right)t\right]}{\pi\left(2k-1\right)\left[-\left(2k-1\right)^2+\omega^2\right]}.
$$

Agora a solução geral fica

$$
\begin{aligned}
y\left(t\right) &= y_p\left(t\right) + a\cos\left(\omega t\right) + b\mathrm{sen}\left(\omega t\right). \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4\mathrm{sen}\left[\left(2k-1\right)t\right]}{\pi\left(2k-1\right)\left[-\left(2k-1\right)^2+\omega^2\right]} + a\cos\left(\omega t\right) + b\mathrm{sen}\left(\omega t\right).
\end{aligned}
$$

Impondo as condições iniciais, vemos que

$$\begin{aligned} y(0) &= a \\ &= 0 \end{aligned}$$

e, então, como acabamos de encontrar que $a = 0$, temos

$$y(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4\mathrm{sen}\left[(2k-1)t\right]}{\pi(2k-1)\left[-(2k-1)^2+\omega^2\right]} + b\mathrm{sen}(\omega t).$$

A derivada desta função dá

$$y'(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4\cos\left[(2k-1)t\right]}{\pi\left[-(2k-1)^2+\omega^2\right]} + \omega b\cos(\omega t).$$

Mas,

$$y'(0) = 0$$

e, portanto,

$$0 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi\left[-(2k-1)^2+\omega^2\right]} + \omega b,$$

isto é,

$$b = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi\omega\left[(2k-1)^2-\omega^2\right]}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4\mathrm{sen}\left[(2k-1)t\right]}{\pi(2k-1)\left[-(2k-1)^2+\omega^2\right]} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi\omega\left[(2k-1)^2-\omega^2\right]}\mathrm{sen}(\omega t) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi\left[(2k-1)^2-\omega^2\right]}\left\{-\frac{\mathrm{sen}\left[(2k-1)t\right]}{(2k-1)} + \frac{1}{\omega}\mathrm{sen}(\omega t)\right\} \end{aligned}$$

e vemos que obtemos a resposta do livro-texto:

$$y = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega^2-(2n-1)^2}\left\{\frac{1}{2n-1}\mathrm{sen}\left[(2n-1)t\right] - \frac{1}{\omega}\mathrm{sen}(\omega t)\right\}.$$