Troca de período

No livro-texto de Boyce et al. o período da função é escolhido como sendo $2L$ e não 2π. E, além disso, no livro-texto o intervalo considerado é $[-L, L]$, enquanto que na formulação acima utilizamos o intervalo de θ como $[0, 2\pi]$. Como podemos mudar nossa formulação para que coincida com os resultados do livro-texto? É simples: nós trocamos de variável. Façamos assim: seja

$$x \equiv \frac{L}{\pi}\theta - L.$$

Veja que quando $\theta = 0$, obtemos $x = -L$, e quando $\theta = 2\pi$, obtemos $x = L$, como queríamos. Assim,

$$\theta = \frac{\pi}{L}x + \pi.$$

Com esta mudança de variável, a Eq. (1) da aula passada,

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp(in\theta), \tag{1}$$

agora fica

$$f\left(\frac{\pi}{L}x + \pi\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp\left[in\left(\frac{\pi}{L}x + \pi\right)\right] \tag{2}$$

e a Eq. (3) também da aula passada,

$$c_n \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \exp(-in\varphi) f(\varphi), \tag{3}$$

agora fica

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{+L} \frac{\pi}{L}dx' \exp\left[-in\left(\frac{\pi}{L}x' + \pi\right)\right] f\left(\frac{\pi}{L}x' + \pi\right) \\ &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{+L} dx' \exp\left[-in\left(\frac{\pi}{L}x' + \pi\right)\right] f\left(\frac{\pi}{L}x' + \pi\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Como a função $f(\theta)$ é uma função arbitrária com as propriedades que discutimos acima, então a função

$$F(x) \equiv f\left(\frac{\pi}{L}x + \pi\right) \tag{5}$$

é também uma função arbitrária com as propriedades acima, mas agora definida no intervalo em que $x \in [-L, L]$, como no livro-texto. Vamos então substituir a Eq. (4) na Eq. (2) já usando a Eq. (5) e obtemos

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{\frac{1}{2L}\int_{-L}^{+L} dx' \exp\left[-in\left(\frac{\pi}{L}x' + \pi\right)\right] F(x')\right\} \exp\left[in\left(\frac{\pi}{L}x + \pi\right)\right]. \tag{6}$$

Agora notemos também que

$$\exp\left[in\left(\frac{\pi}{L}x + \pi\right)\right] = \exp\left(in\frac{\pi}{L}x\right)\exp(in\pi)$$

e

$$\exp\left[-in\left(\frac{\pi}{L}x'+\pi\right)\right] \;=\; \exp\left(-in\frac{\pi}{L}x'\right)\exp\left(-in\pi\right).$$

Quando substituímos estas duas equações na Eq. (6), o fator $\exp\left(-in\pi\right)$ é uma constante na integral, para cada n, e sai para fora do integrando. Aí este fator ao ser multiplicado pelo fator $\exp\left(in\pi\right)$ que está fora do integrando resulta em

$$\exp\left(-in\pi\right)\exp\left(in\pi\right) \;=\; 1,$$

para todos os n's. Com isso, a Eq. (6) agora fica

$$F\left(x\right) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{2L}\int_{-L}^{+L}dx'\,\exp\left(-in\frac{\pi}{L}x'\right)F\left(x'\right)\right]\exp\left(in\frac{\pi}{L}x\right),$$

ou seja,

$$F\left(x\right) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{+\infty}d_n\exp\left(in\frac{\pi}{L}x\right), \tag{7}$$

onde agora definimos os coeficientes

$$d_n \;\equiv\; \frac{1}{2L}\int_{-L}^{+L}dx'\,\exp\left(-in\frac{\pi}{L}x'\right)F\left(x'\right). \tag{8}$$

Usando senos e cossenos de novo

Das Eqs. (7) e (8) podemos passar facilmente para a série de Fourier em termos de senos e cossenos de novo. Basta usarmos

$$\exp\left(-in\frac{\pi}{L}x'\right) \;=\; \cos\left(n\frac{\pi}{L}x'\right)-i\,\mathrm{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x'\right)$$

na Eq. (8), dando

$$\begin{aligned} d_n \;=\; & \frac{1}{2L}\int_{-L}^{+L}dx'\,\cos\left(n\frac{\pi}{L}x'\right)F\left(x'\right)\\ & -i\frac{1}{2L}\int_{-L}^{+L}dx'\,\mathrm{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x'\right)F\left(x'\right),\end{aligned}$$

isto é,

$$d_n \;=\; \frac{C_n}{2}-i\frac{S_n}{2}, \tag{9}$$

onde definimos

$$C_n \;\equiv\; \frac{1}{L}\int_{-L}^{+L}dx'\,\cos\left(n\frac{\pi}{L}x'\right)F\left(x'\right) \tag{10}$$

e

$$S_n \equiv \frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} dx' \,\mathrm{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x'\right) F\left(x'\right). \tag{11}$$

Agora nós substituímos a Eq. (9) de volta na Eq. (7) e aí vem que

$$F\left(x\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{C_n}{2} - i\frac{S_n}{2}\right)\exp\left(in\frac{\pi}{L}x\right).$$

Mas aqui vamos usar

$$\exp\left(in\frac{\pi}{L}x\right) = \cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right) + i\mathrm{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right)$$

para obter

$$\begin{aligned} F\left(x\right) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{C_n}{2} - i\frac{S_n}{2}\right)\cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right) \\ &\quad + i\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{C_n}{2} - i\frac{S_n}{2}\right)\mathrm{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{C_n}{2} - i\frac{S_n}{2}\right)\cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right) \\ &\quad + \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{S_n}{2} + i\frac{C_n}{2}\right)\mathrm{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} F\left(x\right) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{C_n}{2}\cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right) + \frac{S_n}{2}\mathrm{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right)\right] \\ &\quad + i\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[-\frac{S_n}{2}\cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right) + \frac{C_n}{2}\mathrm{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right)\right]. \end{aligned}$$

Mas vamos olhar para a parte imaginária do que está dentro da soma no membro direito desta equação:

$$\begin{aligned} -\frac{S_n}{2}\cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right) + \frac{C_n}{2}\mathrm{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right) &= -\frac{1}{2L}\int_{-L}^{+L} dx' \,\mathrm{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x'\right) F\left(x'\right)\cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right) \\ &\quad + \frac{1}{2L}\int_{-L}^{+L} dx' \,\cos\left(n\frac{\pi}{L}x'\right) F\left(x'\right)\mathrm{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right) \\ &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{+L} dx' \,F\left(x'\right)\mathrm{sen}\left[n\frac{\pi}{L}\left(x - x'\right)\right]. \end{aligned}$$

Ao somarmos sobre n, note que a soma vai de valores negativos até valores positivos. Mas, como

$$\mathrm{sen}\left[-n\frac{\pi}{L}\left(x - x'\right)\right] = -\mathrm{sen}\left[n\frac{\pi}{L}\left(x - x'\right)\right],$$

os termos se cancelam e a função $F(x)$, que sempre foi real, obviamente que não poderia ter uma parte imaginária não nula! Logo,

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{C_n}{2} \cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right) + \frac{S_n}{2} \mathrm{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right) \right],$$

isto é,

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right) + \frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} S_n \mathrm{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right), \tag{12}$$

como no livro-texto.

Exemplo (Boyce et al): problema 10.3.15 (p. 613)

Encontre a solução formal do problema de valor inicial

$$y'' + \omega^2 y = f(t),$$

com

$$y(0) = 0$$

e

$$y'(0) = 0,$$

onde a função $f(t)$ é periódica com período 2π e

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \pi; \\ 0, & t = 0, \pi, 2\pi; \\ -1, & \pi < t < 2\pi. \end{cases} \tag{13}$$

Resposta:

$$y = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega^2 - (2n-1)^2} \left\{ \frac{1}{2n-1} \mathrm{sen}\left[(2n-1)t\right] - \frac{1}{\omega} \mathrm{sen}(\omega t) \right\}.$$

Resolução:

Note que a equação homogênea associada é

$$y_h'' + \omega^2 y_h = 0$$

e sua solução fica

$$y_h(t) = a\cos(\omega t) + b\mathrm{sen}(\omega t).$$

Aí, somada a esta solução, precisamos de uma solução particular da equação inomogênea, $y_p(t)$, que deve satisfazer

$$y_p'' + \omega^2 y_p = f(t). \tag{14}$$

Como já sabemos, a solução geral da equação diferencial dada é a soma

$$\begin{aligned} y(t) &= y_p(t) + y_h(t) \\ &= y_p(t) + a\cos(\omega t) + b\,\mathrm{sen}(\omega t). \end{aligned}$$

A derivada desta solução geral dá

$$y'(t) = y_p'(t) - a\omega\,\mathrm{sen}(\omega t) + b\omega\cos(\omega t).$$

Impondo as condições iniciais acima, devemos ter

$$y_p(0) + a = 0$$

e

$$y_p'(0) + b\omega = 0.$$

Como a “fonte”, $f(t)$, é periódica com período 2π, podemos expandi-la como uma série de Fourier,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp(int).$$

Mas vemos que $f(t)$ é anti-simétrica com relação à origem, isto é,

$$f(-t) = -f(t).$$

Então,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp(-int) = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp(int),$$

ou seja,

$$\sum_{n=+\infty}^{-\infty} c_{-n} \exp(int) = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp(int),$$

ou ainda,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (c_n + c_{-n}) \exp(int) = 0.$$

Como as funções $\exp(int)$, com $n \in \mathbb{Z}$, são linearmente independentes, segue que

$$c_{-n} = -c_n.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp(int) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n \exp(int) + c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \exp(int) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} \exp(-int) + c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \exp(int) \\ &= -\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \exp(-int) + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \exp(int), \end{aligned}$$

já que $c_0 = 0$, pois

$$c_{-n} = -c_n$$

implica

$$c_{-0} = -c_0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} 2ic_n \left[\frac{\exp(int) - \exp(-int)}{2i} \right] \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} 2ic_n \operatorname{sen}(nt). \end{aligned}$$

Então, fazendo

$$d_n \equiv 2ic_n,$$

escrevemos

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n \operatorname{sen}(nt).$$

Ignorando, por enquanto, os pontos de descontinuidade de $f(t)$, isto é, $t = 0, \pi, 2\pi$, os coeficientes coeficientes c_n são dados, como vimos, por

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \, \exp(-in\varphi) \, f(\varphi).$$

Então, agora é só usar a Eq. (13), isto é,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} d\varphi \, \exp(-in\varphi) \, f(\varphi) \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} d\varphi \, \exp(-in\varphi) \, f(\varphi), \end{aligned}$$

já que os casos em pontos discretos não contribuem para as integrais. Assim,

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} d\varphi \,\exp(-in\varphi) \\
&\quad -\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} d\varphi \,\exp(-in\varphi) \\
&= \frac{i}{2\pi n}\left[\exp(-in\pi)-1\right] \\
&\quad -\frac{i}{2\pi n}\left[\exp(-2in\pi)-\exp(-in\pi)\right] \\
&= \frac{i}{2\pi n}\left[\exp(-in\pi)-1\right] \\
&\quad -\frac{i}{2\pi n}\left[1-\exp(-in\pi)\right] \\
&= \frac{i}{\pi n}\left[\exp(-in\pi)-1\right].
\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\exp(-in\pi) &= \cos(n\pi) - i\mathrm{sen}(n\pi) \\
&= (-1)^n .
\end{aligned}$$

Assim,

$$c_n = \frac{i}{\pi n}\left[(-1)^n - 1\right]$$

e

$$\begin{aligned}
d_n &= 2ic_n \\
&= -\frac{2}{\pi n}\left[(-1)^n - 1\right] \\
&= \frac{2}{\pi n}\left[1-(-1)^n\right].
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi n}\left[1-(-1)^n\right]\mathrm{sen}(nt) \\
&= \sum_{2m+1=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi(2m+1)}\left[1-(-1)^{2m+1}\right]\mathrm{sen}\left[(2m+1)t\right] \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi(2m+1)}\mathrm{sen}\left[(2m+1)t\right] \\
&= \sum_{k-1=0}^{+\infty} \frac{4\mathrm{sen}\left[(2k-1)t\right]}{\pi(2k-1)} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4\mathrm{sen}\left[(2k-1)t\right]}{\pi(2k-1)}.
\end{aligned}$$

Substituindo este resultado na Eq. (14), vem

$$y_p'' + \omega^2 y_p = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4\text{sen}\left[(2n-1)\,t\right]}{\pi\,(2n-1)}. \tag{15}$$

(Continua na próxima aula)