Série de Fourier

Uma função periódica

Seja $f(\theta)$ uma função periódica de período 2π. Então, supondo que $\theta \in \mathbb{R}$,

$$f(\theta + 2\pi) \quad = \quad f(\theta).$$

Uma função que também é periódica assim é $\text{sen}\theta$. Outra é $\cos\theta$. Na verdade, qualquer combinação do tipo $a\text{sen}\theta + b\cos\theta$, com $a, b \in \mathbb{R}$, é periódica como $f(\theta)$. Será que $f(\theta) = a\text{sen}\theta + b\cos\theta$ para alguma escolha de a e b reais? Para poder descobrir, precisamos de pelo menos dois valores de $f(\theta)$ no intervalo $(0, 2\pi)$, por exemplo, já que o número de parâmetros que precisamos determinar é 2, isto é, a e b e, portanto, precisamos ter duas equações:

$$f(\theta_1) \quad = \quad a\text{sen}\theta_1 + b\cos\theta_1$$

e

$$f(\theta_2) \quad = \quad a\text{sen}\theta_2 + b\cos\theta_2,$$

com, digamos, $0 < \theta_1 < \theta_2 < 2\pi$. Aí encontraremos a e b, resolvendo esta duas equações, ou seja, podemos multiplicar a primeira por $\text{sen}\theta_2$ e a segunda por $\text{sen}\theta_1$,

$$\text{sen}\theta_2 f(\theta_1) \quad = \quad a\text{sen}\theta_1\text{sen}\theta_2 + b\cos\theta_1\text{sen}\theta_2$$

e

$$\text{sen}\theta_1 f(\theta_2) \quad = \quad a\text{sen}\theta_1\text{sen}\theta_2 + b\text{sen}\theta_1\cos\theta_2.$$

Se subtrairmos a primeira destas duas equações da segunda, vem

$$(\text{sen}\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\text{sen}\theta_2)\, b \quad = \quad \text{sen}\theta_1 f(\theta_2) - \text{sen}\theta_2 f(\theta_1),$$

isto é,

$$\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)\, b \quad = \quad \text{sen}\theta_1 f(\theta_2) - \text{sen}\theta_2 f(\theta_1).$$

Se escolhermos $0 < \theta_1 < \theta_2 < 2\pi$ de tal forma que $\text{sen}(\theta_1 - \theta_2) \neq 0$, encontramos

$$b \quad = \quad \frac{\text{sen}\theta_1 f(\theta_2) - \text{sen}\theta_2 f(\theta_1)}{\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)}.$$

Também é fácil ver que podemos encontrar a, escolhendo adequadamente θ_1 e θ_2. Por exemplo, vemos que

$$\cos\theta_2 f(\theta_1) \quad = \quad a\text{sen}\theta_1\cos\theta_2 + b\cos\theta_1\cos\theta_2$$

e

$$\cos\theta_1 f(\theta_2) = a\mathrm{sen}\theta_2\cos\theta_1 + b\cos\theta_1\cos\theta_2$$

fornecem

$$(\mathrm{sen}\theta_1\cos\theta_2 - \mathrm{sen}\theta_2\cos\theta_1)\, a = \cos\theta_2 f(\theta_1) - \cos\theta_1 f(\theta_2),$$

isto é,

$$a = \frac{\cos\theta_2 f(\theta_1) - \cos\theta_1 f(\theta_2)}{\mathrm{sen}(\theta_1-\theta_2)}.$$

Só para verificar,

$$\begin{aligned}
a\mathrm{sen}\theta_1 + b\cos\theta_1 &= \frac{\mathrm{sen}\theta_1\cos\theta_2 f(\theta_1) - \mathrm{sen}\theta_1\cos\theta_1 f(\theta_2)}{\mathrm{sen}(\theta_1-\theta_2)} \\
&\quad + \frac{\mathrm{sen}\theta_1\cos\theta_1 f(\theta_2) - \mathrm{sen}\theta_2\cos\theta_1 f(\theta_1)}{\mathrm{sen}(\theta_1-\theta_2)} \\
&= \frac{\mathrm{sen}\theta_1\cos\theta_2 - \mathrm{sen}\theta_2\cos\theta_1}{\mathrm{sen}(\theta_1-\theta_2)} f(\theta_1) \\
&= f(\theta_1)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
a\mathrm{sen}\theta_2 + b\cos\theta_2 &= \frac{\mathrm{sen}\theta_2\cos\theta_2 f(\theta_1) - \mathrm{sen}\theta_2\cos\theta_1 f(\theta_2)}{\mathrm{sen}(\theta_1-\theta_2)} \\
&\quad + \frac{\mathrm{sen}\theta_1\cos\theta_2 f(\theta_2) - \mathrm{sen}\theta_2\cos\theta_2 f(\theta_1)}{\mathrm{sen}(\theta_1-\theta_2)} \\
&= \frac{\mathrm{sen}\theta_1\cos\theta_2 - \mathrm{sen}\theta_2\cos\theta_1}{\mathrm{sen}(\theta_1-\theta_2)} f(\theta_2) \\
&= f(\theta_2),
\end{aligned}$$

como deveria ser.

Parece bom, mas aí, fixaremos todos os valores de $f(\theta)$ no intervalo $[0, 2\pi]$ e, por $f(\theta)$ ser periódica com período 2π, para todo $\theta \in \mathbb{R}$. Mas uma coisa é a função dada, original. Outra coisa é nossa função interpolada por $a\mathrm{sen}\theta + b\cos\theta$. Em outras palavras, temos uma função

$$g(\theta) \equiv a\mathrm{sen}\theta + b\cos\theta,$$

com a e b parâmetros dados acima, satisfazendo

$$g(\theta + 2\pi) = g(\theta),$$

mas que só conseguimos garantir que

$$g(\theta_1) = f(\theta_1)$$

e

$$g(\theta_2) \quad = \quad f(\theta_2)\,.$$

Isso não quer dizer que, escolhendo um $\bar{\theta}$ qualquer tal que $\theta_1 < \bar{\theta} < \theta_2$, vamos ter, com certeza,

$$g(\bar{\theta}) \quad = \quad f(\bar{\theta})\,.$$

Afinal, qualquer função, digamos, $\operatorname{sen}(n\theta)$, com $n \in \mathbb{Z}$, também será periódica, ou seja,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}[n(\theta + 2\pi)] &= \operatorname{sen}(n\theta + 2n\pi) \\
&= \operatorname{sen}(n\theta)\,.
\end{aligned}$$

Outra dessa forma é, também, $\cos(n\theta)$, com $n \in \mathbb{Z}$, já que

$$\begin{aligned}
\cos[n(\theta + 2\pi)] &= \cos(n\theta + 2n\pi) \\
&= \cos(n\theta)\,.
\end{aligned}$$

Mas, aí alguém poderia argumentar que podemos, então, tentar uma interpolação para aproximar $f(\theta)$ com mais parâmetros, como, por exemplo, em analogia com o que fizemos acima,

$$h_N(\theta) \quad \equiv \quad \sum_{n=1}^{N} a_n \operatorname{sen}(n\theta) + \sum_{n=0}^{N} b_n \cos(n\theta)\,,$$

onde N é um número inteiro positivo, por exemplo. Note que não adianta querer incluir o termo com $n = 0$ na soma envolvendo senos, pois $\operatorname{sen}0 = 0$. Além disso, não precisamos somar valores negativos de n porque os cossenos não mudam de sinal e os senos mudam de sinal e aí basta redefinir os coeficientes do seno e a forma da nossa interpolação $h_N(\theta)$ continua a mesma, isto, é se tivéssemos escrito

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-N}^{N} a_n \operatorname{sen}(n\theta) &= \sum_{n=-N}^{-1} a_n \operatorname{sen}(n\theta) + \sum_{n=1}^{N} a_n \operatorname{sen}(n\theta) \\
&= \sum_{n=N}^{1} (-a_{-n}) \operatorname{sen}(n\theta) + \sum_{n=1}^{N} a_n \operatorname{sen}(n\theta) \\
&= \sum_{n=1}^{N} (-a_{-n}) \operatorname{sen}(n\theta) + \sum_{n=1}^{N} a_n \operatorname{sen}(n\theta) \\
&= \sum_{n=1}^{N} (a_n - a_{-n}) \operatorname{sen}(n\theta) \\
&= \sum_{n=1}^{N} a'_n \operatorname{sen}(n\theta)\,,
\end{aligned}$$

com

$$a'_n \equiv a_n - a_{-n},$$

então vemos que a forma dessa soma dá na mesma, já que os coeficientes devem ser determinados ainda e, portanto, não importa como damos nomes às incógnitas.

O problema dessa nossa interpolação $h_N(\theta)$ é que aí teremos um número igual a $2N+1$ de coeficientes a determinar e, portanto, precisaremos de $2N+1$ equações independentes para poder encontrar todos os parâmetros. Logo, teremos que escolher $2N+1$ pontos distintos no intervalo $(0, 2\pi)$.

E depois de toda essa trabalheira, só poderemos garantir que

$$h_N(\theta_k) = f(\theta_k),$$

para $k = 1, 2, \ldots, 2N+1$, pois precisamos de N θ's correspondentes aos N coeficientes a_n e de $N+1$ θ's correspondentes aos $N+1$ coeficientes b_n. Poderia ainda acontecer que, mesmo tendo essa interpolação valendo, em um outro ponto qualquer $\tilde{\theta}$ tal que $0 < \tilde{\theta} < 2\pi$ e $\tilde{\theta} \neq \theta_k$, para todo $k = 1, 2, \ldots, 2N+1$, ainda assim, teríamos

$$h_N\left(\tilde{\theta}\right) \neq f\left(\tilde{\theta}\right).$$

De novo, teremos que incluir mais pontos e isso aparentemente não tem mais fim. Ora, não ter fim quer dizer que é infinito. Então, teríamos que tentar

$$h(\theta) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(n\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos(n\theta), \tag{1}$$

tomando o limite em que $N \to \infty$. Nesse caso, teremos que resolver para infinitos parâmetros e, portanto, precisaremos de infinitas equações independentes entre si e, consequentemente, precisaremos de infinitos pontos no intervalo $(0, 2\pi)$. Ora, infinitos pontos em um intervalo é, por exemplo, todos os pontos no intervalo. E, claro, se o intervalo é real, então estamos falando de uma continuidade de pontos. Isso cheira à integral, não é?! Que tal se tentar usar integrais para fazer isso e achar os parâmetros todos, a_n e b_n, para $n = 0, 1, 2, \ldots$? E aqui podemos fazer como antes ou melhorar a notação acima para tornar tudo mais compacto. Vamos escolher essa segunda maneira de analisar o problema.

Notemos que

$$\operatorname{sen}(n\theta) = \frac{\exp(in\theta) - \exp(-in\theta)}{2i}$$

e

$$\cos(n\theta) = \frac{\exp(in\theta) + \exp(-in\theta)}{2}.$$

Então a Eq. (1) agora fica:

$$\begin{aligned}
h(\theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\exp(in\theta) - \exp(-in\theta)}{2i} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{\exp(in\theta) + \exp(-in\theta)}{2} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2i} \exp(in\theta) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2i} \exp(-in\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{2} \exp(in\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{2} \exp(-in\theta) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2i} + \frac{b_n}{2}\right) \exp(in\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{a_n}{2i} + \frac{b_n}{2}\right) \exp(-in\theta) + b_0
\end{aligned}$$

Vamos definir os seguintes coeficientes complexos para $n = 0$:

$$c_n \equiv \frac{a_n}{2i} + \frac{b_n}{2}$$

e

$$\begin{aligned}
c_{-n} &\equiv -\frac{a_n}{2i} + \frac{b_n}{2} \\
&= c_n^*.
\end{aligned}$$

E vamos definir

$$c_0 \equiv b_0.$$

Com isso, agora podemos reescrever a equação acima assim:

$$\begin{aligned}
h(\theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp(in\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \exp(-in\theta) + c_0 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp(in\theta) + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n \exp(in\theta) + c_0 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp(in\theta) + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n \exp(in\theta) + c_0 \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp(in\theta).
\end{aligned}$$

Agora temo suma equação bem compacta:

$$h(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp(in\theta). \tag{2}$$

Que tal encontrarmos todos os infinitos coeficientes c_n que são complexos? Para isso, notemos primeiro que

$$\int_0^{2\pi} d\theta \, \exp(-im\theta) \exp(in\theta) = \int_0^{2\pi} d\theta \, \exp[i(n-m)\theta].$$

Para resolver essa integral, consideremos dois casos: $n = m$ e $n \neq m$. Quando $n = m$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} d\theta \, \exp\left(-im\theta\right) \exp\left(in\theta\right) &= \int_0^{2\pi} d\theta \\
&= 2\pi.
\end{aligned}$$

Quando $n \neq m$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} d\theta \, \exp\left(-im\theta\right) \exp\left(in\theta\right) &= \int_0^{2\pi} d\theta \, \exp\left[i\left(n-m\right)\theta\right] \\
&= \left.\frac{\exp\left[i\left(n-m\right)\theta\right]}{i\left(n-m\right)}\right|_0^{2\pi} \\
&= \frac{\exp\left[i\left(n-m\right)2\pi\right]}{i\left(n-m\right)} - \frac{1}{i\left(n-m\right)} \\
&= \frac{1}{i\left(n-m\right)} - \frac{1}{i\left(n-m\right)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Resumindo, portanto, temos:

$$\int_0^{2\pi} d\theta \, \exp\left(-im\theta\right) \exp\left(in\theta\right) = 2\pi\delta_{mn}.$$

Aqui, o símbolo δ_{mn} é chamado de delta de Kronecker e é definido como

$$\delta_{mn} \equiv \begin{cases} 1, & \text{se } m = n, \text{ e} \\ 0, & \text{se } m \neq n. \end{cases}$$

Agora é fácil achar todos os coeficientes c_n na Eq. (2): basta multiplicá-la por $\exp\left(-im\theta\right)$ e integrar de 0 a 2π. O resultado fica:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} d\theta \, \exp\left(-im\theta\right) h\left(\theta\right) &= \int_0^{2\pi} d\theta \, \exp\left(-im\theta\right) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp\left(in\theta\right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_0^{2\pi} d\theta \, \exp\left(-im\theta\right) \exp\left(in\theta\right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n 2\pi\delta_{mn} \\
&= 2\pi c_m.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$c_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \, \exp\left(-im\theta\right) h\left(\theta\right), \tag{3}$$

para $m \in \mathbb{Z}$.

O que queremos, como dissemos no início, é ter uma aproximação para $f(\theta)$ e, portanto, queremos saber se é possível termos, para todo θ,

$$h(\theta) = f(\theta)$$

se escolhermos os coeficientes e a expanção das Eqs. (2) e (3) trocando $h(\theta)$ por $f(\theta)$. Aí essas equações, agora escritas

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp(in\theta) \tag{4}$$

e

$$c_n \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \exp(-in\varphi) f(\varphi), \tag{5}$$

dão a representação complexa da chamada série de Fourier. Resta saber agora isso sempre vale, ou seja, serve para qualquer função periódica $f(\theta)$? E se $f(\theta)$ não for periódica? Teria como aproximá-la por uma série de Fourier assim mesmo?

Convergência da série de Fourier

Aqui vamos fazer algo similar ao que o problema 10.18 do livro do Boyce et al. faz. Suponhamos que $f(\theta)$ e sua primeira derivada sejam contínuas, pelo menos em pedaços, sobre os reais. Também, como vimos, Então, usando a Eq. (5) obtemos

$$\begin{aligned}
nc_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi\, n \exp(-in\varphi) f(\varphi) \\
&= \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\frac{d}{d\varphi} \exp(-in\varphi)\right] f(\varphi) \\
&= \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{d}{d\varphi} [\exp(-in\varphi) f(\varphi)] - \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \exp(-in\varphi) \frac{d}{d\varphi} f(\varphi) \\
&= \frac{i}{2\pi} \exp(-in\varphi) f(\varphi)\Big|_0^{2\pi} - \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \exp(-in\varphi) f'(\varphi) \\
&= \frac{i}{2\pi} [\exp(-in2\pi) f(2\pi) - \exp(-in \times 0) f(0)] \\
&\quad - \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \exp(-in\varphi) f'(\varphi) \\
&= -\frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \exp(-in\varphi) f'(\varphi).
\end{aligned}$$

Mas, então,

$$\begin{aligned}
|nc_n| &= \left|\left(-\frac{i}{2\pi}\right)\left[\int_0^{2\pi} d\varphi \, \exp\left(-in\varphi\right) f'\left(\varphi\right)\right]\right| \\
&= \left|-\frac{i}{2\pi}\right|\left|\int_0^{2\pi} d\varphi \, \exp\left(-in\varphi\right) f'\left(\varphi\right)\right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} d\varphi \, \exp\left(-in\varphi\right) f'\left(\varphi\right)\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|d\varphi \, \exp\left(-in\varphi\right) f'\left(\varphi\right)\right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \, \left|\exp\left(-in\varphi\right)\right| \left|f'\left(\varphi\right)\right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \, \left|f'\left(\varphi\right)\right|.
\end{aligned}$$

Logo, como

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \, \left|f'\left(\varphi\right)\right| \quad < \quad \infty,$$

segue que nc_n é limitado quando $n \to \infty$. Isto é, como $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \, \left|f'\left(\varphi\right)\right|$ é um número que não depende de n e é finito porque $f'\left(\varphi\right)$ é contínua, segue que quando n cresce ilimitadamente, então nc_n não diverge:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} |c_n| &\leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \, \left|f'\left(\varphi\right)\right|}{n} \\
&= 0.
\end{aligned}$$