Separação de variáveis (continuação)

Para $x = 0$, impomos que $T(0, t)$ se anula, isto é,

$$aG_0 \exp\left(-k^2 t\right) = 0,$$

resultando que

$$a = 0.$$

Logo,

$$T(x, t) = bG_0 \exp\left(-k^2 t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{k}{\sqrt{D}} x\right).$$

Além disso, para $x = L$, impomos que $T(L, t)$ se anula, ou seja,

$$bG_0 \exp\left(-k^2 t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{k}{\sqrt{D}} L\right) = 0.$$

Como esta equação deve valer para todo t, segue que

$$\frac{k}{\sqrt{D}} L = n\pi,$$

ou ainda,

$$k = n \frac{\pi \sqrt{D}}{L},$$

para $n = 0, 1, 2, \ldots$ Portanto,

$$T_n(x, t) = bG_0 \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 D}{L^2} t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right).$$

Como para $n = 0$ esta solução se anula, excluímos o caso $n = 0$ e então teremos as condições de contorno satisfeitas não trivialmente para $n = 1, 2, 3, \ldots$ Notemos que soluções com n's negativos são linearmente dependentes das respectivas soluções com $-n$'s e, assim, excluímos essa redundância.

Resta agora impormos a condição inicial, isto é,

$$T(x, 0) = f(x).$$

Como $f(x)$ não precisa ser dada proporcional a um seno do tipo $\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$, temos problema com a solução acima. O que fazemos, então, é tentar uma superposição de soluções com diferentes n's e respectivos coeficientes:

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 D}{L^2} t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right).$$

Em $t = 0$, impomos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) = f(x).$$

Como podemos encontrar os infinitos coeficientes c_n agora? E uma resposta é usando a teoria da série de Fourier.