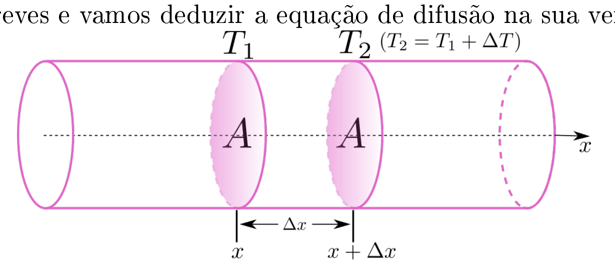
A equação de difusão (de calor)

No livro-texto de Boyce et al. tem a dedução da equação de difusão em um dos apêndices do capítulo 10. Aqui seremos breves e vamos deduzir a equação de difusão na sua versão unidimensional.



Vamos pegar um fio de material condutor de seção transversal com área A e vamos olhar um pequeno trecho de comprimento Δx medido a partir do ponto de posição x sobre o eixo de simetria do fio, que coincide com o eixo x do sistema de coordenadas. Vamos supor que no ponto x a temperatura seja T_1 e, no ponto $x + \Delta x$, a temperatura seja $T_2 = T_1 + \Delta T$. De acordo com a lei de Fourier de condução do calor, a quantidade de calor por unidade de tempo que atravessa o trecho de comprimento Δx do fio, com a diferença de temperatura ΔT, é proporcional à área transversal A e inversamente proporcional à distância Δx. Assim,

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\kappa A \frac{\Delta T}{\Delta x},$$

onde a constante de proporcionalidade κ é chamada de condutividade térmica do material que compõe o fio. Caso ΔT seja suficientemente grande em magnitude, κ pode mudar de valor ao longo do comprimento Δx, mas aqui vamos supor que estamos considerando como válida a aproximação de que κ é uma constante ao longo do trecho de fio que vamos considerar. O sinal de menos leva em conta o fato de que a temperatura T_2 deve ser menor do que a temperatura T_1 para que o calor, que é energia, atravesse desde a posição x até a posição $x + \Delta x$. Quando $T_1 < T_2$ segue que $\Delta Q < 0$, indicando que o calor está se propagando no sentido negativo do eixo x.

No limite em que Δx tende a zero, segue que

$$\frac{\Delta T}{\Delta x} \rightarrow \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Claramente, como o calor vai fluindo através do fio, a temperatura em cada ponto x varia no tempo e, assim,

$$T = T(x,t).$$

Então, vamos denotar, como é usual, que

$$T_x(x,t) \equiv \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Na seção transversal do fio em x a quantidade de calor que a atravessa por unidade de tempo é justamente dada por

$$\left.\frac{\Delta Q}{\Delta t}\right|_x = -\kappa A T_x(x,t).$$

Já na posição $x + \Delta x$, a quantidade de calor atravessando lá é dada por

$$\left.\frac{\Delta Q}{\Delta t}\right|_{x+\Delta x} = -\kappa A T_x(x + \Delta x, t).$$

Seja a densidade volumétrica de massa do fio dada por ρ, que vamos considerar em torno do ponto x como sendo aproximadamente constante. Então, a massa do trecho de fio com comprimento Δx é dada por

$$\Delta m = \rho A \Delta x.$$

Seja c o calor específico do material. Sabemos que a capacidade térmica, C, do pedaço de fio de comprimento Δx deve ser igual ao calor específico do material do fio multiplicado pela massa desse pedaço, isto é,

$$\begin{aligned} C &= c\Delta m \\ &= c\rho A\Delta x. \end{aligned}$$

A capacidade térmica é a quantidade de calor que se acumula, Q_{ac}, no pedaço do fio de comprimento Δx por unidade de variação de temperatura lá dentro. Assim, durante um intervalo de tempo Δt, essa quantidade de calor, Q_{ac}, é dada por

$$Q_{ac} = C\Delta T,$$

isto é,

$$Q_{ac} = C\left[T\left(x+\frac{\Delta x}{2}, t+\Delta t\right) - T\left(x+\frac{\Delta x}{2}, t\right)\right].$$

Mas o calor que se acumula por unidade de tempo é dado pelo calor que entra através da seção transversal em x menos o calor que sai através da seção transversal em $x+\Delta x$. Logo, podemos escrever que, durante um intervalo de tempo Δt, temos:

$$\begin{aligned} \frac{Q_{ac}}{\Delta t} &= \left.\frac{\Delta Q}{\Delta t}\right|_{x,t+\Delta t/2} - \left.\frac{\Delta Q}{\Delta t}\right|_{x+\Delta x,t+\Delta t/2} \\ &= -\kappa A T_x\left(x, t+\frac{\Delta t}{2}\right) - \left[-\kappa A T_x\left(x+\Delta x, t+\frac{\Delta t}{2}\right)\right] \\ &= \kappa A\left[T_x\left(x+\Delta x, t+\frac{\Delta t}{2}\right) - T_x\left(x, t+\frac{\Delta t}{2}\right)\right]. \end{aligned}$$

Assim, usando a equação anterior para Q_{ac}, segue que

$$\frac{C\left[T\left(x+\frac{\Delta x}{2}, t+\Delta t\right) - T\left(x+\frac{\Delta x}{2}, t\right)\right]}{\Delta t} = \kappa A\left[T_x\left(x+\Delta x, t+\frac{\Delta t}{2}\right) - T_x\left(x, t+\frac{\Delta t}{2}\right)\right].$$

Usando a expressão para a capacidade térmica do pedaço de fio de comprimento Δx, vemos que

$$c\rho A\Delta x\frac{\left[T\left(x+\frac{\Delta x}{2}, t+\Delta t\right) - T\left(x+\frac{\Delta x}{2}, t\right)\right]}{\Delta t} = \kappa A\left[T_x\left(x+\Delta x, t+\frac{\Delta t}{2}\right) - T_x\left(x, t+\frac{\Delta t}{2}\right)\right].$$

isto é,

$$c\rho\left[\frac{T\left(x+\frac{\Delta x}{2}, t+\Delta t\right) - T\left(x+\frac{\Delta x}{2}, t\right)}{\Delta t}\right] = \kappa\left[\frac{T_x\left(x+\Delta x, t+\frac{\Delta t}{2}\right) - T_x\left(x, t+\frac{\Delta t}{2}\right)}{\Delta x}\right].$$

Como vamos fazer o limite em que Δx tende a zero, obtemos

$$c\rho\left[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{T\left(x+\frac{\Delta x}{2}, t+\Delta t\right) - T\left(x+\frac{\Delta x}{2}, t\right)}{\Delta t}\right] = \kappa\left[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{T_x\left(x+\Delta x, t+\frac{\Delta t}{2}\right) - T_x\left(x, t+\frac{\Delta t}{2}\right)}{\Delta x}\right]$$

e o resultado é

$$c\rho\left[\frac{T\left(x, t+\Delta t\right) - T\left(x, t\right)}{\Delta t}\right] = \kappa\left[\frac{\partial T_x\left(x, t+\frac{\Delta t}{2}\right)}{\partial x}\right].$$

Também vamos tomar o limite em que o intervalo de tempo Δt tende a zero e, portanto, obtemos agora que

$$c\rho\left[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{T\left(x,t+\Delta t\right)-T\left(x,t\right)}{\Delta t}\right] = \kappa\left[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\partial T_x\left(x,t+\frac{\Delta t}{2}\right)}{\partial x}\right]$$

e o resultado dá

$$c\rho\frac{\partial T\left(x,t\right)}{\partial t} = \kappa\frac{\partial T_x\left(x,t\right)}{\partial x}.$$

No entanto, já sabemos que

$$T_x\left(x,t\right) = \frac{\partial}{\partial x}T\left(x,t\right)$$

e, assim, segue que

$$c\rho\frac{\partial T\left(x,t\right)}{\partial t} = \kappa\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}T\left(x,t\right)\right],$$

ou seja,

$$\frac{\partial T\left(x,t\right)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T\left(x,t\right)}{\partial x^2},$$

onde definimos o chamado coeficiente de difusão, D, como sendo dado por

$$D \equiv \frac{\kappa}{c\rho}.$$

Separação de variáveis

Vamos seguir o exemplo dado no livro-texto e supor que temos um fio de comprimento L, cujas seções transversais dos extremos do fio estejam, respectivamente, em $x=0$ e em $x=L$. Além disso, vamos supor que, em $t=0$,

$$T\left(x,0\right) = f\left(x\right),$$

onde $f\left(x\right)$ é uma função contínua e suave definida no fio, satisfazendo

$$f\left(0\right) = 0$$

e

$$f\left(L\right) = 0.$$

E, para finalizar o enunciado deste exemplo, também supomos que

$$T\left(0,t\right) = 0$$

e

$$T\left(L,t\right) = 0,$$

para todo $t>0$. Calculemos $T\left(x,t\right)$ para $x\in[0,L]$ e $t>0$. Assim, o problema é o de encontrar a solução da equação de difusão de calor,

$$\frac{\partial T\left(x,t\right)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T\left(x,t\right)}{\partial x^2},$$

com condição inicial

$$T(x,0) = f(x)$$

e, também, com as condições de contorno

$$T(0,t) = 0$$

e

$$T(L,t) = 0.$$

O método de separação de variáveis consiste em um ansatz, isto é, um “chute”, para o tipo de função $T(x,t)$ que satisfaz a equação diferencial parcial acima da seguinte forma:

$$T(x,t) = F(x)\,G(t)\,,$$

onde $F(x)$ é uma função que só depende de x e $G(t)$ é uma função que só depende de t. Substituindo este ansatz na equação diferencial acima, vemos que

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[F(x)\,G(t)\right] = D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[F(x)\,G(t)\right],$$

isto é,

$$F(x)\,\frac{\partial}{\partial t}G(t) = DG(t)\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}F(x)\,,$$

ou seja,

$$F(x)\,\frac{d}{dt}G(t) = DG(t)\,\frac{d^2}{dx^2}F(x)\,.$$

Dividindo esta equação por $F(x)\,G(t)$, obtemos

$$\frac{1}{G(t)}\frac{d}{dt}G(t) = \frac{D}{F(x)}\frac{d^2}{dx^2}F(x)\,.$$

Isto é, seja a função só de t

$$\mathscr{F}_{tempo}(t) \equiv \frac{1}{G(t)}\frac{d}{dt}G(t)$$

e a seja a função só de x

$$\mathscr{F}_{posição}(x) \equiv \frac{D}{F(x)}\frac{d^2}{dx^2}F(x)\,.$$

A igualdade acima afirma que, para todos os valores possíveis de t e todos os valores possíveis de x, que são variáveis independentes uma da outra, temos

$$\mathscr{F}_{tempo}(t) = \mathscr{F}_{posição}(x)\,.$$

Se, por exemplo, fixamos $t = 3$, teremos um valor $\mathscr{F}_{tempo}(3)$, que é fixo, no primeiro membro e a equação agora fica, para todo valor de x,

$$\mathscr{F}_{posição}(x) = \mathscr{F}_{tempo}(3)\,.$$

Logo, $\mathscr{F}_{posição}(x)$ é uma constante. E, por argumento simétrico, concluímos que $\mathscr{F}_{tempo}(t)$ é igual à mesma constante.

Como no primeiro membro temos uma função que só depende de t e no segundo membro temos uma outra função que só depende de x, por serem x e t variáveis que não dependem uma da outra, isto é, variáveis independentes entre si, podemos ver que, para cada t, se fixamos x, o primeiro membro da equação é constante. E, vice-versa, para cada x, fixando t, vemos que o segundo membro da equação é constante. E, como ambos os membros são iguais entre si, segue que há apenas uma constante, ou seja,

$$\frac{1}{G(t)}\frac{d}{dt}G(t) = K,$$

isto é,

$$\frac{d}{dt}G(t) = KG(t),$$

e

$$\frac{D}{F(x)}\frac{d^2}{dx^2}F(x) = K,$$

ou seja,

$$\frac{d^2}{dx^2}F(x) = \frac{K}{D}F(x),$$

onde K é essa constante, chamada de constante de separação. Resolvendo a primeira destas equações dá uma exponencial,

$$G(t) = G_0 \exp(Kt),$$

onde G_0 é uma constante de integração. A segunda destas equações, em x, teria soluções periódicas como combinações lineares de senos e cossenos caso $K < 0$, já que $D > 0$, empiricamente. E, de fato, como temos que impor

$$T(0,t) = 0$$

e

$$T(L,t) = 0,$$

estamos à procura de soluções periódicas. Sendo assim, vamos escolher $K < 0$ e, para facilitar, vamos usar

$$K \equiv -k^2,$$

com $k > 0$. Com isso, a solução geral para $F(x)$ fica

$$F(x) = a\cos\left(\frac{k}{\sqrt{D}}x\right) + b\mathrm{sen}\left(\frac{k}{\sqrt{D}}x\right),$$

com a e b constantes a ser determinadas pela imposição das condições de contorno. Logo, podemos escrever nossa solução tentativa como

$$\begin{aligned} T(x,t) &= F(x)G(t) \\ &= aG_0\exp\left(-k^2t\right)\cos\left(\frac{k}{\sqrt{D}}x\right) + bG_0\exp\left(-k^2t\right)\mathrm{sen}\left(\frac{k}{\sqrt{D}}x\right). \end{aligned}$$