

Relações de Kramers & Kronig ou relações de dispersão

Da análise do modelo de Drude & Lorentz segue que a polarização em um meio dispersivo não é proporcional ao campo elétrico. No entanto, definimos a polarização complexa, $\mathcal{P}$, que é proporcional ao campo elétrico complexo, isto é,

$$\mathcal{P} = \chi_c \epsilon,$$

onde

$$\chi_c = \chi_c(\omega)$$

é a susceptibilidade elétrica complexa e que depende da frequência. Sendo assim, o campo deslocamento elétrico complexo é dado por

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &= \epsilon + 4\pi\mathcal{P} \\ &= (1 + 4\pi\chi_c)\epsilon \\ &= K_c\epsilon,\end{aligned}$$

onde também definimos a constante dielétrica complexa,

$$K_c = 1 + 4\pi\chi_c.$$

Sendo assim, o campo deslocamento elétrico real não é, em geral, proporcional ao campo elétrico real, pois

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \text{Re}[\mathcal{D}(\mathbf{r}, t)] \\ &= \text{Re}[K_c\epsilon(\mathbf{r}, t)].\end{aligned}$$

Essa análise tem sido feita para ondas monocromáticas, mas vale também para um pacote de ondas com uma distribuição finita de frequências, que passamos a considerar a seguir.

Podemos pensar, no caso geral, que $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ é um pacote de ondas monocromáticas e escrever

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) \exp(-i\omega t).$$

Ora, $\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) \exp(-i\omega t)$ é um campo monocromático, de frequência ω , e, portanto, podemos escrever

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\omega; \mathbf{r}, t) &= \tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) \exp(-i\omega t) \\ &= K_c(\omega) \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \exp(-i\omega t)\end{aligned}$$

para um campo elétrico complexo monocromático dado por

$$\epsilon(\omega; \mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \exp(-i\omega t)$$

que, integrado sobre ω , resulta no campo elétrico real:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \exp(-i\omega t).$$

Logo, para um meio dispersivo, podemos escrever

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega K_c(\omega) \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \exp(-i\omega t).$$

Da transformada de Fourier inversa para o campo elétrico real acima, temos

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') \exp(i\omega t').$$

Com isso,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega K_c(\omega) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') \exp(i\omega t') \exp(-i\omega t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega [1 + 4\pi\chi_c(\omega)] \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') \exp[-i\omega(t - t')] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \exp[-i\omega(t - t')] \right\} \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega [4\pi\chi_c(\omega)] \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') \exp[-i\omega(t - t')] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') \delta(t - t') \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega [4\pi\chi_c(\omega)] \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') \exp[-i\omega(t - t')] \\ &= \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega [4\pi\chi_c(\omega)] \exp[-i\omega(t - t')] \right\} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t'), \end{aligned}$$

isto é,

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \int_{-\infty}^{+\infty} dt' G(t - t') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t'),$$

onde definimos

$$G(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega [4\pi\chi_c(\omega)] \exp(-i\omega\tau).$$

Com a substituição de variável definida por

$$\tau = t - t',$$

podemos também escrever

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau G(\tau) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - \tau).$$

Fica claro, assim, que o campo deslocamento elétrico não é proporcional ao campo elétrico no mesmo instante de tempo, pois recebe contribuições do campo elétrico em outros tempos, isto é, a relação acima, entre $\mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$, não é local no tempo.

Usando o modelo harmônico de Drude & Lorentz, a dispersão em meios materiais é caracterizada por uma susceptibilidade elétrica complexa dada por

$$\chi_c = \sum_k \frac{N n_k e^2}{m (\omega_k^2 - \omega^2 - i \gamma_k \omega)},$$

onde n_k é o número de elétrons do tipo k por molécula, N é o número de moléculas por unidade de volume, e é a carga eletrônica, m é a massa do elétron, γ_k é o coeficiente de dissipação, ω_k é a frequência natural de oscilação dos elétrons do tipo k e ω é a frequência da onda eletromagnética incidente. Seguindo o livro de J. D. Jackson, vamos utilizar o fato de que χ_c pode ser aproximada por

$$\chi_c \approx \frac{N n_1 e^2}{m (\omega_1^2 - \omega^2 - i \gamma_1 \omega)},$$

se $\omega \approx \omega_1$. Nesse caso,

$$\begin{aligned} G(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{4\pi N n_1 e^2}{m (\omega_1^2 - \omega^2 - i \gamma_1 \omega)} \exp(-i\omega\tau) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{\omega_p^2}{\omega_1^2 - \omega^2 - i \gamma_1 \omega} \exp(-i\omega\tau), \end{aligned}$$

onde ω_p é a frequência de plasma do material. Essa integral pode ser calculada se usarmos o teorema dos Resíduos. Para isso, consideremos a integral no plano complexo:

$$I(C) = \oint_C dz \frac{\omega_p^2}{\omega_1^2 - z^2 - i \gamma_1 z} \exp(-iz\tau).$$

Os polos do integrando dessa integral ocorrem quando

$$\omega_1^2 - z^2 - i \gamma_1 z = 0,$$

isto é,

$$z^2 + i \gamma_1 z - \omega_1^2 = 0,$$

ou seja,

$$z_{\pm} = \frac{-i \gamma_1 \pm \sqrt{4\omega_1^2 - \gamma_1^2}}{2}.$$

Mesmo quando

$$4\omega_1^2 - \gamma_1^2 < 0,$$

se $\omega_1 \neq 0$, ambos os polos localizam-se no semi-plano complexo com $\text{Im}(z) < 0$, supondo, como sempre, que $\gamma_1 > 0$. Portanto, para $\tau < 0$ podemos tomar o contorno C no semi-plano complexo superior e obter

$$\begin{aligned} I(C) &= \oint_C dz \frac{\omega_p^2}{\omega_1^2 - z^2 - i \gamma_1 z} \exp(-iz\tau) \\ &= 0, \end{aligned}$$

ou seja, para $\tau < 0$,

$$\begin{aligned} \oint_C dz \frac{\omega_p^2}{\omega_1^2 - z^2 - i\gamma_1 z} \exp(-iz\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{\omega_p^2}{\omega_1^2 - \omega^2 - i\gamma_1 \omega} \exp(-i\omega\tau) \\ &= 0 \end{aligned}$$

e, portanto,

$$G(\tau) = 0, \text{ para } \tau < 0.$$

Já para $\tau > 0$ o contorno deve ser fechado no semi-plano complexo inferior e, nesse caso, o Teorema dos Resíduos dá

$$\begin{aligned} I(C) &= \oint_C dz \frac{\omega_p^2}{\omega_1^2 - z^2 - i\gamma_1 z} \exp(-iz\tau) \\ &= - \oint_C dz \frac{\omega_p^2}{z^2 + i\gamma_1 z - \omega_1^2} \exp(-iz\tau) \\ &= 2\pi i \frac{\omega_p^2 \exp(-iz_- \tau)}{z_- - z_+} + 2\pi i \frac{\omega_p^2 \exp(-iz_+ \tau)}{z_+ - z_-} \\ &= 2\pi i \omega_p^2 \frac{\exp(-iz_+ \tau) - \exp(-iz_- \tau)}{z_+ - z_-} \\ &= 4\pi i \omega_p^2 \frac{\exp\left(-i \frac{-i\gamma_1 + \sqrt{4\omega_1^2 - \gamma_1^2}}{2} \tau\right) - \exp\left(-i \frac{-i\gamma_1 - \sqrt{4\omega_1^2 - \gamma_1^2}}{2} \tau\right)}{-i\gamma_1 + \sqrt{4\omega_1^2 - \gamma_1^2} + i\gamma_1 + \sqrt{4\omega_1^2 - \gamma_1^2}} \\ &= 2\pi i \frac{\omega_p^2}{\sqrt{4\omega_1^2 - \gamma_1^2}} \left[\exp\left(\frac{-\gamma_1 - i\sqrt{4\omega_1^2 - \gamma_1^2}}{2} \tau\right) - \exp\left(\frac{-\gamma_1 + i\sqrt{4\omega_1^2 - \gamma_1^2}}{2} \tau\right) \right] \\ &= 2\pi i \frac{\omega_p^2}{\sqrt{4\omega_1^2 - \gamma_1^2}} \exp\left(-\frac{\gamma_1}{2} \tau\right) \left[\exp\left(-i\sqrt{\omega_1^2 - \frac{\gamma_1^2}{4}} \tau\right) - \exp\left(i\sqrt{\omega_1^2 - \frac{\gamma_1^2}{4}} \tau\right) \right] \\ &= 4\pi \frac{\omega_p^2}{\sqrt{4\omega_1^2 - \gamma_1^2}} \exp\left(-\frac{\gamma_1}{2} \tau\right) \operatorname{sen}\left(\sqrt{\omega_1^2 - \frac{\gamma_1^2}{4}} \tau\right). \end{aligned}$$

Assim,

$$G(\tau) = \frac{\omega_p^2}{\sqrt{\omega_1^2 - \frac{\gamma_1^2}{4}}} \exp\left(-\frac{\gamma_1}{2} \tau\right) \operatorname{sen}\left(\sqrt{\omega_1^2 - \frac{\gamma_1^2}{4}} \tau\right), \text{ para } \tau > 0.$$

Logo, $G(\tau)$ só não é zero para $\tau > 0$ e, portanto, podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau G(\tau) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - \tau). \\ &= \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \int_0^{\infty} d\tau G(\tau) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - \tau), \end{aligned}$$

mostrando que, neste modelo, o campo deslocamento elétrico depende apenas dos valores do campo elétrico anteriores ao tempo presente, de acordo com o princípio de causalidade. A relação

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \int_0^\infty d\tau G(\tau) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - \tau),$$

pode ser tomada como sendo válida apenas porque o princípio de causalidade é válido, independentemente do particular modelo de susceptibilidade elétrica que utilizamos. Assim, mesmo sem realmente conhecermos $G(\tau)$, sabemos que, por causalidade, a relação entre $\mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$ deve ser dada como acima. Além disso,

$$G(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega [4\pi\chi_c(\omega)] \exp(-i\omega\tau)$$

e, invertendo, podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau G(\tau) \exp(i\omega\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \exp(i\omega\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' [4\pi\chi_c(\omega')] \exp(-i\omega'\tau) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' [4\pi\chi_c(\omega')] \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \exp[i(\omega - \omega')\tau] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' [4\pi\chi_c(\omega')] \delta(\omega - \omega') \\ &= 4\pi\chi_c(\omega), \end{aligned}$$

isto é,

$$\chi_c(\omega) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau G(\tau) \exp(i\omega\tau)$$

e, como

$$G(\tau) = 0, \text{ para } \tau < 0,$$

segue que

$$\chi_c(\omega) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty d\tau G(\tau) \exp(i\omega\tau),$$

independentemente da escolha do modelo; apenas o princípio de causalidade está presente nessa expressão para a susceptibilidade elétrica.

Vamos agora tomar a continuação analítica da susceptibilidade e escrever, para z complexo,

$$\chi_c(z) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty d\tau G(\tau) \exp(iz\tau).$$

Como $\mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$ são reais,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \int_0^{+\infty} d\tau G(\tau) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - \tau) \\ &= \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \int_0^{+\infty} d\tau G^*(\tau) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - \tau), \end{aligned}$$

implicando que

$$G^*(\tau) = G(\tau),$$

já que a relação acima é suposta valer para quaisquer campos **D** e **E** que existem na natureza. Portanto,

$$\begin{aligned}\chi_c(z^*) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{+\infty} d\tau G(\tau) \exp(iz^*\tau) \\ &= \left[\frac{1}{4\pi} \int_0^{+\infty} d\tau G^*(\tau) \exp(-iz\tau) \right]^* \\ &= \left[\frac{1}{4\pi} \int_0^{+\infty} d\tau G(\tau) \exp(-iz\tau) \right]^* \\ &= [\chi_c(-z)]^*,\end{aligned}$$

ou seja,

$$[\chi_c(z^*)]^* = \chi_c(-z),$$

que é mais um critério que um modelo fisicamente aceitável de susceptibilidade elétrica deve satisfazer.

Como $\exp(-iz\tau)$ é uma função analítica, segue que $\chi_c(z)$ será analítica no semi-plano complexo superior se $G(\tau)$ for finita para todo τ . No entanto, é necessário que

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} G(\tau) = 0 \quad (1)$$

para que $\chi_c(z)$ também seja analítica sobre o eixo real. Para ver isso, suponha que, conforme τ cresce acima de um certo valor, $G(\tau)$ assuma um valor finito diferente de zero. Supondo que $\chi_c(z)$ seja analítica em cada ponto do eixo real mesmo com $G(\tau)$ finita, então é necessário que $\chi_c(z)$ seja contínua no eixo real, isto é,

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \chi_c(a + i\eta) = \lim_{\eta \rightarrow 0^-} \chi_c(a + i\eta),$$

com $a \in \mathbb{R}$. Então,

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_0^\infty d\tau G(\tau) \exp[i(a + i\eta)\tau] = \lim_{\eta \rightarrow 0^-} \int_0^\infty d\tau G(\tau) \exp[i(a + i\eta)\tau],$$

isto é,

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_0^\infty d\tau G(\tau) \exp(ia\tau - \eta\tau) = \lim_{\eta \rightarrow 0^-} \int_0^\infty d\tau G(\tau) \exp(ia\tau - \eta\tau),$$

ou seja,

$$'' \lim_{\eta \rightarrow 0^+} (\text{algo finito})'' = '' \lim_{\eta \rightarrow 0^-} (\pm\infty)'' ,$$

que é uma contradição. Logo, temos que a Eq. (1) deve ser válida para que $\chi_c(z)$ seja analítica no eixo real.

A Eq. (1), de fato, é verdade para dielétricos, mas não é verdade para condutores, para os quais $G(\tau) \rightarrow 4\pi\sigma$ quando $\tau \rightarrow \infty$. Assim, para dielétricos, sem condutividade alguma, $\chi_c(z)$ é analítica no semi-plano complexo superior e sobre o eixo real. Então, do teorema de Cauchy decorre que

$$\chi_c(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz' \frac{\chi_c(z')}{z' - z},$$

se C for um contorno que contenha um intervalo do eixo real e feche-se no semi-plano complexo superior. Também é importante notarmos que

$$\begin{aligned}\chi_c(\omega) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{+\infty} d\tau G(\tau) \exp(i\omega\tau) \\ &= \frac{1}{4\pi i\omega} \int_0^{+\infty} d\tau G(\tau) \frac{\partial}{\partial\tau} \exp(i\omega\tau) \\ &= \frac{1}{4\pi i\omega} \int_0^{+\infty} d\tau \frac{\partial}{\partial\tau} [G(\tau) \exp(i\omega\tau)] \\ &\quad - \frac{1}{4\pi i\omega} \int_0^{+\infty} d\tau G'(\tau) \exp(i\omega\tau),\end{aligned}$$

onde

$$G'(\tau) = \frac{dG(\tau)}{d\tau}.$$

Notemos que, como vimos, no modelo ilustrativo acima,

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^-} G(\tau) = 0.$$

Também notamos que

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} d\tau \frac{\partial}{\partial\tau} [G(\tau) \exp(i\omega\tau)] &= \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{\eta}^{+\infty} d\tau \frac{\partial}{\partial\tau} [G(\tau) \exp(i\omega\tau)] \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0^+} [G(\tau) \exp(i\omega\tau)]_{\eta}^{+\infty} \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0^+} [-G(\eta) \exp(i\omega\eta)] \\ &= - \lim_{\eta \rightarrow 0^+} G(\eta),\end{aligned}$$

pois, para dielétricos,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} G(\tau) = 0.$$

Por continuidade de $G(\tau)$, devemos ter

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} G(\eta) = \lim_{\tau \rightarrow 0^-} G(\tau)$$

e, portanto,

$$\int_0^{+\infty} d\tau \frac{\partial}{\partial\tau} [G(\tau) \exp(i\omega\tau)] = 0,$$

implicando em

$$\chi_c(\omega) = \frac{i}{4\pi\omega} \int_0^{+\infty} d\tau G'(\tau) \exp(i\omega\tau).$$

Podemos repetir esse procedimento *ad infinitum* e obter

$$\begin{aligned}
\chi_c(\omega) &= \frac{i}{4\pi\omega} \int_0^{+\infty} d\tau G'(\tau) \exp(i\omega\tau) \\
&= \frac{1}{4\pi\omega^2} \int_0^{+\infty} d\tau G'(\tau) \frac{\partial}{\partial\tau} \exp(i\omega\tau) \\
&= \frac{1}{4\pi\omega^2} \int_0^{+\infty} d\tau \frac{\partial}{\partial\tau} [G'(\tau) \exp(i\omega\tau)] \\
&\quad - \frac{1}{4\pi\omega^2} \int_0^{+\infty} d\tau G''(\tau) \exp(i\omega\tau) \\
&= -\frac{G'(0^+)}{4\pi\omega^2} \\
&\quad - \frac{1}{4\pi\omega^2} \int_0^{+\infty} d\tau G''(\tau) \exp(i\omega\tau) \\
&= -\frac{G'(0^+)}{4\pi\omega^2} \\
&\quad + \frac{i}{4\pi\omega^3} \int_0^{+\infty} d\tau G''(\tau) \frac{\partial}{\partial\tau} \exp(i\omega\tau) \\
&= -\frac{G'(0^+)}{4\pi\omega^2} \\
&\quad + \frac{i}{4\pi\omega^3} \int_0^{+\infty} d\tau \frac{\partial}{\partial\tau} [G''(\tau) \exp(i\omega\tau)] \\
&\quad - \frac{i}{4\pi\omega^3} \int_0^{+\infty} d\tau G'''(\tau) \exp(i\omega\tau) \\
&= -\frac{G'(0^+)}{4\pi\omega^2} + \frac{iG''(0^+)}{4\pi\omega^3} \\
&\quad - \frac{i}{4\pi\omega^3} \int_0^{+\infty} d\tau G'''(\tau) \exp(i\omega\tau),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\chi_c(\omega) = -\frac{G'(0^+)}{4\pi\omega^2} + \frac{iG''(0^+)}{4\pi\omega^3} - \frac{G'''(0^+)}{4\pi\omega^4} + \dots$$

Esse resultado mostra que

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \chi_c(\omega) = 0.$$

Então, a continuação analítica da susceptibilidade elétrica, isto é,

$$\chi_c(z) = -\frac{G'(0^+)}{4\pi z^2} + \frac{iG''(0^+)}{4\pi z^3} - \frac{G'''(0^+)}{4\pi z^4} + \dots,$$

também fornece

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \chi_c(z) = 0.$$

Desse resultado, segue que

$$\chi_c(z') \rightarrow 0$$

quando o raio do contorno no semi-plano complexo superior tender a infinito e, portanto,

$$\begin{aligned}\chi_c(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz' \frac{\chi_c(z')}{z' - z} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\chi_c(\omega')}{\omega' - z}.\end{aligned}$$

Seja η uma quantidade real, positiva e infinitesimal. Então, tomando

$$z = \omega + i\eta,$$

podemos escrever

$$\chi_c(\omega + i\eta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\chi_c(\omega')}{\omega' - \omega - i\eta}$$

e, portanto,

$$\chi_c(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\chi_c(\omega')}{\omega' - \omega - i\eta}.$$

Há uma maneira bastante útil de reescrever esse limite:

$$\begin{aligned}\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\chi_c(\omega')}{\omega' - \omega - i\eta} &= \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\chi_c(\omega')}{\omega' - \omega} + i\pi \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \chi_c(\omega') \delta(\omega' - \omega) \\ &= \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\chi_c(\omega')}{\omega' - \omega} + i\pi \chi_c(\omega).\end{aligned}$$

Digressão: uma relação útil para denominadores singulares

Consideremos a função complexa

$$f_\eta(x) = \frac{1}{x - i\eta},$$

onde η é uma quantidade real, positiva e infinitesimal. Tipicamente, essa função aparece dentro de integrais como, por exemplo,

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_a^b dx' f_\eta(x' - x) g(x') = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_a^b dx' \frac{g(x')}{x' - x - i\eta},$$

onde $g(x)$ é uma função de x real, com a e b reais tais que

$$a < x < b.$$

Olhemos, agora, esta representação da função delta de Dirac:

$$\delta(x - x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \exp[ik(x - x')].$$

Podemos manipular o membro direito dessa expressão assim:

$$\begin{aligned} \delta(x - x') &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \exp[-\eta|k| + ik(x - x')] \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^0 dk \exp[\eta k + ik(x - x')] \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} dk \exp[-\eta k + ik(x - x')] \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\eta + i(x - x')} + \frac{1}{2\pi} \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\eta - i(x - x')} \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{\eta + i(x - x')} + \frac{1}{\eta - i(x - x')} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{2\eta}{\eta^2 + (x - x')^2} \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{\eta}{\eta^2 + (x - x')^2}, \end{aligned}$$

isto é,

$$\delta(x - x') = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{\eta}{\pi [\eta^2 + (x - x')^2]}.$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{1}{x' - x - i\eta} &= \frac{x' - x + i\eta}{(x' - x)^2 + \eta^2} \\ &= \frac{(x' - x)}{(x' - x)^2 + \eta^2} + i \frac{\eta}{(x' - x)^2 + \eta^2} \\ &= \frac{(x' - x)}{(x' - x)^2 + \eta^2} + i\pi \left\{ \frac{\eta}{\pi [\eta^2 + (x - x')^2]} \right\}, \end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_a^b dx' \frac{g(x')}{x' - x - i\eta} &= \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_a^b dx' g(x') \left[\frac{(x' - x)}{(x' - x)^2 + \eta^2} \right] \\ &\quad + \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_a^b dx' g(x') i\pi \left\{ \frac{\eta}{\pi [\eta^2 + (x - x')^2]} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_a^b dx' g(x') \left[\frac{(x' - x)}{(x' - x)^2 + \eta^2} \right] \\
&+ \int_a^b dx' g(x') i\pi \delta(x - x').
\end{aligned}$$

Resta entendermos o significado do primeiro integrando do membro direito dessa equação. Sempre que

$$x' \neq x,$$

temos

$$\begin{aligned}
\frac{(x' - x)}{(x' - x)^2 + \eta^2} &\approx \frac{(x' - x)}{(x' - x)^2} \\
&= \frac{1}{x' - x},
\end{aligned}$$

quando $\eta \rightarrow 0^+$. No entanto, no único ponto em que $x' = x$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{(x' - x)}{(x' - x)^2 + \eta^2} &= \frac{0}{0^2 + \eta^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_a^b dx' g(x') \left[\frac{(x' - x)}{(x' - x)^2 + \eta^2} \right] = \mathcal{P} \int_a^b dx' \frac{g(x')}{x' - x},$$

onde o símbolo $\mathcal{P}$ indica que se deve tomar apenas a parte principal da integral que o segue. Com isso, o limite que procuramos pode ser escrito como

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_a^b dx' \frac{g(x')}{x' - x - i\eta} = \mathcal{P} \int_a^b dx' \frac{g(x')}{x' - x} + \int_a^b dx' g(x') i\pi \delta(x - x'),$$

que, com um certo abuso notacional, pode ser indicado assim:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_a^b dx' \frac{g(x')}{x' - x - i\eta} = \int_a^b dx' g(x') \left[\mathcal{P} \frac{1}{x' - x} + i\pi \delta(x - x') \right].$$

Abusando ainda mais, podemos até mesmo escrever a fórmula útil:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{1}{x' - x - i\eta} = \mathcal{P} \frac{1}{x' - x} + i\pi \delta(x - x').$$

Fim da digressão

Guias de onda de seção transversal constante

Antes de considerarmos uma aplicação específica, suponhamos um tubo reto, oco e infinito, feito de material condutor ideal, com seção transversal constante. Vamos considerar que o interior desse tubo seja preenchido por um material dielétrico linear, homogêneo e isotrópico, com permissividade elétrica ϵ e permeabilidade magnética μ . Tomemos o eixo z ao longo do comprimento do tubo e suponhamos que a espessura da parede condutora seja constante. As ondas eletromagnéticas que se propagariam no interior de um tal guia de ondas de seção transversal constante devem satisfazer as equações

$$\nabla^2 \epsilon - \frac{\mu \epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial t^2} = 0$$

e

$$\nabla^2 \beta - \frac{\mu \epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} = 0.$$

Para ondas monocromáticas, tomemos como dependência temporal de nosso ansatz a função $\exp(-i\omega t)$. Com isso, as equações acima escrevem-se

$$\nabla^2 \epsilon + \mu \epsilon \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon = 0$$

e

$$\nabla^2 \beta + \mu \epsilon \frac{\omega^2}{c^2} \beta = 0.$$

Modos TE

Procuramos por modos transversais elétricos, TE, ou seja, imponhamos $\epsilon_z = 0$ dentro do guia de ondas. Da Lei de Indução de Faraday temos

$$\begin{aligned} \nabla \times \epsilon &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \beta}{\partial t} \\ &= i \frac{\omega}{c} \beta. \end{aligned}$$

Em termos de componentes cartesianas, essa equação resulta em

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon_z}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_y}{\partial z} &= i \frac{\omega}{c} \beta_x, \\ \frac{\partial \epsilon_x}{\partial z} - \frac{\partial \epsilon_z}{\partial x} &= i \frac{\omega}{c} \beta_y, \\ \frac{\partial \epsilon_y}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_x}{\partial y} &= i \frac{\omega}{c} \beta_z. \end{aligned}$$

Para modos TE:

$$-\frac{\partial \epsilon_y}{\partial z} = i \frac{\omega}{c} \beta_x$$

e

$$\frac{\partial \epsilon_x}{\partial z} = i \frac{\omega}{c} \beta_y.$$

Procuremos por ondas que se propaguem ao longo do sentido positivo do eixo z . Assim, tomamos a dependência funcional em z dos campos ϵ e β como $\exp(ik_z z)$ e obtemos

$$\epsilon_x = \frac{\omega}{k_z c} \beta_y$$

e

$$\epsilon_y = -\frac{\omega}{k_z c} \beta_x.$$

Da Lei de Ampère & Maxwell obtemos

$$\begin{aligned} \nabla \times \beta &= \frac{\mu \epsilon}{c} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} \\ &= -i\mu \epsilon \frac{\omega}{c} \epsilon, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_z}{\partial y} - \frac{\partial \beta_y}{\partial z} &= -i\mu \epsilon \frac{\omega}{c} \epsilon_x \\ &= -i\mu \epsilon \frac{\omega^2}{k_z c^2} \beta_y, \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial z} - \frac{\partial \beta_z}{\partial x} &= -i\mu \epsilon \frac{\omega}{c} \epsilon_y \\ &= i\mu \epsilon \frac{\omega^2}{k_z c^2} \beta_x, \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial x} - \frac{\partial \beta_x}{\partial y} &= -i\mu \epsilon \frac{\omega}{c} \epsilon_z \\ &= 0. \end{aligned}$$

Com o ansatz referente à dependência em z , essas equações dão

$$\frac{\partial \beta_z}{\partial y} - ik_z \beta_y = -i\mu \epsilon \frac{\omega^2}{k_z c^2} \beta_y$$

e

$$ik_z \beta_x - \frac{\partial \beta_z}{\partial x} = i\mu \epsilon \frac{\omega^2}{k_z c^2} \beta_x,$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \beta_x &= -\frac{ik_z}{k_z^2 - \mu \epsilon \frac{\omega^2}{c^2}} \left(\frac{\partial \beta_z}{\partial x} \right) \\ &= -\frac{k_z c}{\omega} \epsilon_y \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \beta_y &= -\frac{ik_z}{k_z^2 - \mu \epsilon \frac{\omega^2}{c^2}} \left(\frac{\partial \beta_z}{\partial y} \right) \\ &= \frac{k_z c}{\omega} \epsilon_x. \end{aligned}$$