

A polarização da luz

Se tivermos, por exemplo,

$$\boldsymbol{\epsilon} = (E_x \hat{\mathbf{x}} + iE_y \hat{\mathbf{y}}) \exp(ik_z z - i\omega t),$$

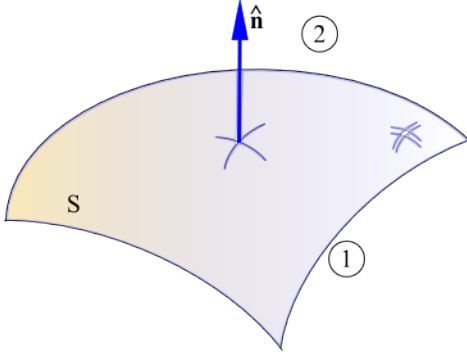
teremos luz polarizada. Se $|E_x| = |E_y|$, teremos polarização circular. Se $|E_x| \neq |E_y|$, a polarização é dita elíptica. Para vermos porque isso acontece, tomemos a parte real da onda plana acima:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \text{Re}[(E_x \hat{\mathbf{x}} + iE_y \hat{\mathbf{y}}) \exp(ik_z z - i\omega t)] \\ &= E_x \hat{\mathbf{x}} \cos(k_z z - \omega t) - E_y \hat{\mathbf{y}} \sin(k_z z - \omega t). \end{aligned}$$

No plano $z = z_0$, com z_0 constante, o vetor campo elétrico descreve uma elipse conforme o tempo passa; a elipse é uma circunferência se $|E_x| = |E_y|$.

Condições de contorno para os campos

Quando dois materiais diferentes estão em contato, mesmo que lineares, homogêneos e isotrópicos, na região da interface entre eles pode haver discontinuidades dos campos, pois as susceptibilidades elétrica e magnética podem variar apreciavelmente de um material para outro. A interface entre os meios é representada por uma superfície singular, onde as discontinuidades ocorrem. Para calcularmos os campos na presença de uma interface utilizamos condições de contorno que fornecem, a priori, os valores das discontinuidades dos campos.



Das equações

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho$$

e

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

segue que as condições de contorno para as componentes normais de $\mathbf{D}$ e $\mathbf{B}$ são as mesmas que para o caso estático, isto é,

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1)|_S = 4\pi\sigma$$

e

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1)|_S = 0,$$

onde $\hat{\mathbf{n}}$ é o versor que aponta do meio 1 para o meio 2 e S é a interface de separação entre os meios.

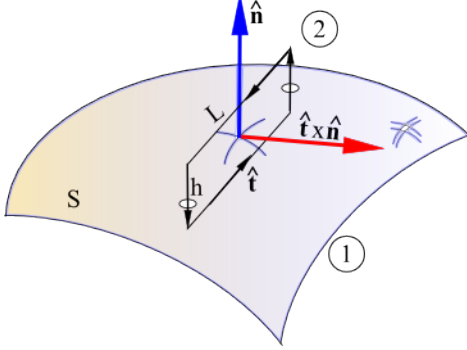
Para as equações

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

e

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

um pouco mais de cuidado é necessário com as derivadas parciais com relação ao tempo.



Por exemplo, para a Lei de Ampère-Maxwell,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

consideramos um ponto sobre a interface S e fazemos uma circuitação plana e retangular, com seu plano contendo a normal à superfície no ponto considerado. Se $\hat{\mathbf{n}}$ é a normal, seja $\hat{\mathbf{t}}$ um versor perpendicular à normal no ponto considerado. Então, $\hat{\mathbf{t}}$ é tangente à superfície S . O vetor $\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}$ é também um versor e é ortogonal a ambos os versores $\hat{\mathbf{t}}$ e $\hat{\mathbf{n}}$. Com esses três versores, construímos uma circuitação em torno do ponto considerado da interface S . Ao longo de $\hat{\mathbf{t}}$, na região 1, traçamos um lado do retângulo de comprimento L . Ao longo de $\hat{\mathbf{n}}$, atravessando a interface da região 1 para a região 2, traçamos outro lado do retângulo de comprimento h . O retângulo está completo e podemos considerar o Teorema de Stokes para o fluxo do campo intensidade magnética sobre a superfície do retângulo, considerando L e h infinitesimais:

$$\begin{aligned} \int_{\text{ret}} da (\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) &= \oint d\mathbf{r} \cdot \mathbf{H} \\ &= L \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{H}_1 + \frac{h}{2} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H}_1 + \frac{h}{2} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H}_2 \\ &\quad - L \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{H}_2 - \frac{h}{2} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H}_2 - \frac{h}{2} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H}_1 \\ &= L \hat{\mathbf{t}} \cdot (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \\ &= \int_{\text{ret}} da (\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \left(\frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \\ &= \frac{4\pi}{c} L (\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{j} + \frac{1}{c} \int_{\text{ret}} da (\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right), \end{aligned}$$

onde $\mathbf{j}$ é a corrente livre superficial na interface S . Aqui nós introduzimos a densidade superficial de corrente elétrica, $\mathbf{j}$, que é definida como sendo a quantidade de carga por unidade de tempo e comprimento transversal à direção dessa corrente.

Assim, na figura acima, temos uma corrente I_L que atravessa o retângulo de largura L e altura h . Uma superfície, como a considerada acima, fisicamente não existe. Qualquer material por onde essa corrente passa deve ter, fisicamente, alguma espessura não nula. Seja ℓ essa espessura. Nesse caso, podemos considerar que o sentido de I_L seja dado por $\hat{\mathbf{e}}$ e, portanto, podemos definir uma densidade de corrente $\mathbf{J}$ que atravessa a área transversal do retângulo e a corrente I_L é, então, dada por

$$I_L = \int_{\text{ret}} da (\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{J}.$$

Neste caso, como a espessura através da qual a corrente passa, fisicamente, sendo ℓ , teremos $da = \ell L$, e a corrente acima fica

$$I_L = \ell L (\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{J}.$$

Como, para todos os efeitos práticos, já que ℓ é desprezível perante nossa resolução experimental, podemos ocultar essa espessura definindo uma densidade superficial de corrente assim:

$$\mathbf{j} \equiv \mathbf{J}\ell.$$

Com isso, a mesma corrente acima, I_L , se expressa, em termos dessa nova densidade de corrente “efetiva” como

$$I_L = L (\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{j}.$$

A condição de contorno nesse caso dá

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{t}} \cdot (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)|_S &= \frac{4\pi}{c} (\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{j} \Big|_S + \frac{1}{c} \int_{\text{ret}} \frac{da}{L} (\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right), \\ &= \frac{4\pi}{c} \hat{\mathbf{t}} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{j}) \Big|_S, \end{aligned}$$

pois

$$\int_{\text{ret}} \frac{da}{L} (\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \rightarrow 0$$

quando $h \rightarrow 0$. Assim, a componente tangencial do campo intensidade magnética não é contínua quando $\mathbf{j} \neq \mathbf{0}$. No entanto, $\hat{\mathbf{t}}$ é arbitrário; vamos então reescrever essa condição de contorno em termos apenas da normal $\hat{\mathbf{n}}$. Como $\hat{\mathbf{t}}$ é arbitrário e tangente a S , então, $(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2 - \frac{4\pi}{c} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{j})$ deve ser perpendicular a $\hat{\mathbf{t}}$, ou seja,

$$\hat{\mathbf{t}} \cdot \left(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2 - \frac{4\pi}{c} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{j} \right) \Big|_S = 0,$$

isto é,

$$\left(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2 - \frac{4\pi}{c} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{j} \right) = \alpha \hat{\mathbf{n}} + \beta (\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} \times \left(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2 - \frac{4\pi}{c} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{j} \right) \Big|_S &= \beta \hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}) \\ &= \beta \hat{\mathbf{t}}. \end{aligned}$$

Como $\hat{\mathbf{t}}$ é arbitrário e o membro esquerdo dessa equação não é arbitrário, segue que $\beta = 0$ e a condição de contorno fica

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)|_S &= \frac{4\pi}{c} \hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{j}) \\ &= \frac{4\pi}{c} \hat{\mathbf{n}} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{j}) - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}.\end{aligned}$$

Como $\mathbf{j}$ é tangente à interface, segue que

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{j} = 0$$

e, portanto,

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)|_S = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j},$$

como no caso estático. Analogamente, da Lei de Indução de Faraday segue a continuidade da componente tangencial de $\mathbf{E}$:

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)|_S = \mathbf{0}.$$

O índice de refração de meios dielétricos

Para um meio dielétrico linear, homogêneo e isotrópico, o índice de refração é definido como a razão entre os valores absolutos da velocidade da luz no vácuo, c , e da velocidade da luz no meio, v . As equações de onda para os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ em um dielétrico assim são

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mathbf{0}$$

e

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \mathbf{0}.$$

A velocidade de propagação da luz no dielétrico tem, portanto, módulo

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}.$$

Assim, o índice de refração é dado por

$$\begin{aligned}n &= \frac{c}{v} \\ &= \sqrt{\mu\varepsilon}.\end{aligned}$$

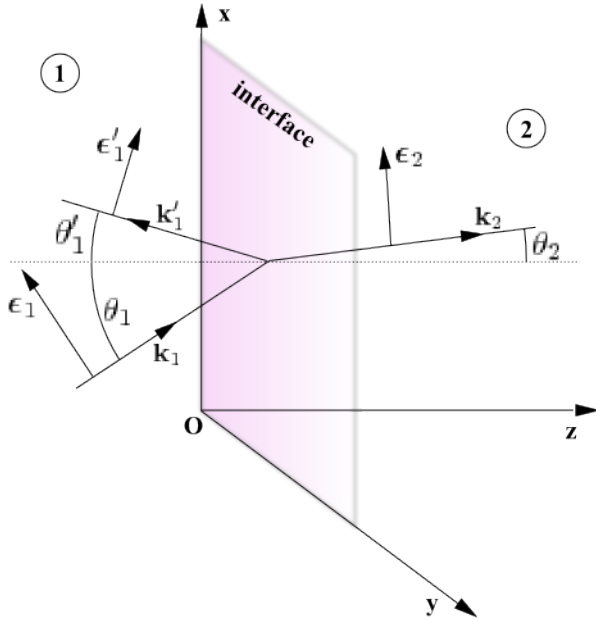
Nesse caso, também temos que o valor absoluto do vetor de onda pode ser escrito como

$$\begin{aligned}k &= \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c} \omega \\ &= \frac{\omega}{v} \\ &= \frac{c}{v} \frac{\omega}{c} \\ &= n \frac{\omega}{c}.\end{aligned}$$

Reflexão e refração de ondas eletromagnéticas em interfaces planas entre dielétricos

Para ilustrar a utilização das condições de contorno para os campos, tratemos a reflexão e a refração de ondas eletromagnéticas planas por interfaces entre dielétricos lineares, homogêneos e isotrópicos. Para não trivializar a discussão, vamos considerar que o vetor de onda incidente não seja paralelo à interface entre os dois meios dielétricos. Há dois casos linearmente independentes que consideramos abaixo.

Campo elétrico paralelo ao plano de incidência



Nesse caso, escolhemos o sistema de coordenadas de forma que a interface entre os dois meios dielétricos coincida com o plano xy . Também indexamos os meios dielétricos de modo que o meio 1 tenha $z < 0$ e o meio 2 tenha $z > 0$. Assim, a normal à interface é o versor $\hat{\mathbf{z}}$. O plano de incidência é formado pelo vetor de onda incidente, $\mathbf{k}_1$, e pela normal à interface, $\hat{\mathbf{z}}$. Escolhemos o plano de incidência como o plano xz . Como a incidência não é normal à interface, temos

$$\mathbf{k}_1 = \hat{\mathbf{z}}k_1 \cos \theta_1 + \hat{\mathbf{x}}k_1 \sin \theta_1,$$

onde k_1 é o módulo do vetor $\mathbf{k}_1$ e θ_1 é o ângulo de incidência, isto é, o ângulo entre o vetor de onda, $\mathbf{k}_1$, e a normal à interface, $\hat{\mathbf{z}}$. Escolhemos polarização plana e o campo elétrico incidente paralelo ao plano de incidência, ou seja,

$$\epsilon_1 = (-\hat{\mathbf{z}}\epsilon_{01} \sin \theta_1 + \hat{\mathbf{x}}\epsilon_{01} \cos \theta_1) \exp(izk_1 \cos \theta_1 + ixk_1 \sin \theta_1 - i\omega t).$$

Por isotropia e homogeneidade dos meios dielétricos, as ondas refletida e refratada têm polarizações planas também paralelas ao plano de incidência e podemos escrever

$$\epsilon'_1 = (\hat{\mathbf{z}}\epsilon'_{01} \sin \theta'_1 + \hat{\mathbf{x}}\epsilon'_{01} \cos \theta'_1) \exp(-izk_1 \cos \theta'_1 + ixk_1 \sin \theta'_1 - i\omega t),$$

para a onda refletida, com

$$\mathbf{k}'_1 = -\hat{\mathbf{z}}k_1 \cos \theta'_1 + \hat{\mathbf{x}}k_1 \sin \theta'_1,$$

e

$$\boldsymbol{\epsilon}_2 = (-\hat{\mathbf{z}}\epsilon_{02} \sin \theta_2 + \hat{\mathbf{x}}\epsilon_{02} \cos \theta_2) \exp(izk_2 \cos \theta_2 + ixk_2 \sin \theta_2 - i\omega t),$$

para a onda refratada, com

$$\mathbf{k}_2 = \hat{\mathbf{z}}k_2 \cos \theta_2 + \hat{\mathbf{x}}k_2 \sin \theta_2.$$

Notemos que já escolhemos os campos elétricos de modo a serem ortogonais aos respectivos vetores de onda. Os ângulos θ'_1 e θ_2 são, respectivamente, os ângulos de reflexão e refração.