

As equações de Maxwell para meios não condutores, lineares, homogêneos e isotrópicos

Mesmo no caso não estático, quando os campos e as fontes podem depender do tempo, ainda assim as equações de Maxwell macroscópicas podem ser escritas como

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

e

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

onde

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$$

e

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}.$$

Aqui, é claro, $\mathbf{P}$ é a polarização e $\mathbf{M}$ é a magnetização. Para um meio não condutor, linear, homogêneo e isotrópico,

$$\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E}$$

e

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H},$$

onde χ_e e χ_m são as susceptibilidades elétrica e magnética, respectivamente. O meio é não condutor porque, mesmo havendo campo elétrico aplicado ao meio, não há corrente livre. O meio é linear porque a polarização e a magnetização dependem linearmente dos campos elétrico e intensidade magnética, respectivamente. O meio é homogêneo porque as susceptibilidades não dependem da posição no meio. Como as direções da polarização e da magnetização induzidas são paralelas, respectivamente, aos campos elétrico e intensidade magnética, o meio é dito isotrópico; será dito anisotrópico quando a polarização for ao longo de uma direção não paralela ao campo elétrico ou quando a magnetização for ao longo de uma direção não paralela ao campo intensidade magnética.

Para um meio não condutor, linear, homogêneo e isotrópico,

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} \\ &= \mathbf{E} + 4\pi\chi_e \mathbf{E} \\ &= (1 + 4\pi\chi_e) \mathbf{E} \\ &= \varepsilon \mathbf{E}, \end{aligned}$$

onde definimos a permissividade elétrica do meio como

$$\varepsilon \equiv 1 + 4\pi\chi_e,$$

e

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M} \\ &= \mathbf{B} - 4\pi\chi_m\mathbf{H},\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \mathbf{H} + 4\pi\chi_m\mathbf{H} \\ &= (1 + 4\pi\chi_m)\mathbf{H} \\ &= \mu\mathbf{H},\end{aligned}$$

onde definimos a permeabilidade magnética do meio como

$$\mu \equiv 1 + 4\pi\chi_m.$$

Substituindo

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$$

e

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu}$$

nas equações de Maxwell macroscópicas acima, obtemos

$$\nabla \cdot (\varepsilon\mathbf{E}) = 4\pi\rho,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

e

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu} \right) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial (\varepsilon\mathbf{E})}{\partial t},$$

que, como estamos supondo ε e μ constantes na região do meio, também podem ser escritas como

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \frac{\rho}{\varepsilon},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

e

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi\mu}{c} \mathbf{J} + \frac{\mu\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Revisão: as equações de onda no vácuo

Tomando o rotacional de ambos os membros da Lei de Indução de Faraday, que, como vimos é

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

obtemos

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla \times \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right),$$

ou seja,

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial (\nabla \times \mathbf{B})}{\partial t}.$$

Considerando uma região do espaço onde não haja cargas ou correntes livres, então $\rho = 0$, $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ e as Leis de Gauss e de Ampère-Maxwell ficam

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Logo, a equação acima,

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial (\nabla \times \mathbf{B})}{\partial t},$$

pode ser reescrita como

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mathbf{0}.$$

Essa é a equação de onda para o campo elétrico.

Podemos também obter a equação de onda para o campo indução magnética. Para isso, podemos tomar o rotacional de ambos os membros da Lei de Ampère-Maxwell com $\rho = 0$ e $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ para obter

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \frac{1}{c} \nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right),$$

ou seja,

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial (\nabla \times \mathbf{E})}{\partial t}.$$

Usando o fato de não haver monopolos magnéticos e a Lei de Indução de Faraday, isto é,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

obtemos

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \mathbf{0},$$

que é a equação de onda para o campo indução magnética.

Ondas planas em meios não condutores, lineares, homogêneos e isotrópicos

As equações de Maxwell macoscópicas para um meio não condutor, linear, homogêneo e isotrópico são escritas como

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \frac{\rho}{\varepsilon},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

e

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi\mu}{c} \mathbf{J} + \frac{\mu\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Considerando uma região do meio com $\rho = 0$ e $\mathbf{J} = \mathbf{0}$, podemos proceder analogamente ao caso do vácuo e obter as equações de onda para os campos elétrico e indução magnética:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mathbf{0}$$

e

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \mathbf{0}.$$

Há campos $\mathbf{E} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$ que satisfazem essas equações? Para responder a essa questão, consideremos inicialmente somente a componente x de $\mathbf{E}$:

$$\nabla^2 E_x(\mathbf{r}, t) - \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 E_x(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0.$$

É óbvio que podemos escrever a identidade

$$E_x(\mathbf{r}, t) = \int_{V_\infty} d^3 r' \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') E_x(\mathbf{r}', t).$$

Uma representação para a função delta de Dirac é

$$\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}').]$$

Assim,

$$\begin{aligned} E_x(\mathbf{r}, t) &= \int_{V_\infty} d^3 r' \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] E_x(\mathbf{r}', t) \\ &= \int d^3 k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \left[\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{V_\infty} d^3 r' \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}') E_x(\mathbf{r}', t) \right] \\ &= \int d^3 k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) f_x(\mathbf{k}, t), \end{aligned}$$

onde

$$f_x(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{V_\infty} d^3 r' \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}') E_x(\mathbf{r}', t).$$

Aplicando o operador

$$\nabla^2 - \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

à expressão acima para E_x dá

$$\begin{aligned} \nabla^2 E_x(\mathbf{r}, t) - \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 E_x(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} &= \int d^3 k f_x(\mathbf{k}, t) \nabla^2 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \\ &- \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \int d^3 k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \frac{\partial^2 f_x(\mathbf{k}, t)}{\partial t^2} \\ &= \int d^3 k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \left[-k^2 f_x(\mathbf{k}, t) - \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 f_x(\mathbf{k}, t)}{\partial t^2} \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$-k^2 f_x(\mathbf{k}, t) - \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 f_x(\mathbf{k}, t)}{\partial t^2} = 0.$$

A solução geral dessa equação pode ser escrita como:

$$f_x(\mathbf{k}, t) = a_x(\mathbf{k}) \exp(ikct/\sqrt{\mu\varepsilon}) + b_x(\mathbf{k}) \exp(-ikct/\sqrt{\mu\varepsilon}),$$

onde $a_x(\mathbf{k})$ e $b_x(\mathbf{k})$ são funções arbitrárias de $\mathbf{k}$. Assim, a solução geral para E_x é dada por

$$\begin{aligned} E_x(\mathbf{r}, t) &= \int d^3 k a_x(\mathbf{k}) \exp \left[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i \frac{kct}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \right] \\ &+ \int d^3 k b_x(\mathbf{k}) \exp \left[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i \frac{kct}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \right]. \end{aligned}$$

Como $E_x(\mathbf{r}, t)$ é uma grandeza real, devemos ter

$$[E_x(\mathbf{r}, t)]^* = E_x(\mathbf{r}, t),$$

isto é,

$$\begin{aligned} \int d^3 k [a_x(\mathbf{k})]^* \exp \left[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i \frac{kct}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \right] &+ \\ \int d^3 k [b_x(\mathbf{k})]^* \exp \left[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i \frac{kct}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \right] &= \int d^3 k a_x(\mathbf{k}) \exp \left[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i \frac{kct}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \right] \\ &+ \int d^3 k b_x(\mathbf{k}) \exp \left[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i \frac{kct}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \right]. \end{aligned}$$

Trocando a variável de integração $\mathbf{k}$ por $-\mathbf{k}$ no primeiro membro dessa equação fornece

$$\begin{aligned} \int d^3k [a_x(-\mathbf{k})]^* \exp \left[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i \frac{kct}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \right] &+ \\ \int d^3k [b_x(-\mathbf{k})]^* \exp \left[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i \frac{kct}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \right] &= \int d^3k a_x(\mathbf{k}) \exp \left[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i \frac{kct}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \right] \\ &+ \int d^3k b_x(\mathbf{k}) \exp \left[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i \frac{kct}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \right] \end{aligned}$$

e, portanto, independência linear entre as funções exponenciais complexas implica em

$$[a_x(-\mathbf{k})]^* = b_x(\mathbf{k})$$

e

$$[b_x(-\mathbf{k})]^* = a_x(\mathbf{k}).$$

Em particular, podemos escrever

$$a_x(-\mathbf{k}) = [b_x(\mathbf{k})]^*.$$

Assim, a forma geral de $E_x(\mathbf{r}, t)$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned} E_x(\mathbf{r}, t) &= \int d^3k a_x(-\mathbf{k}) \exp \left[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i \frac{kct}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \right] \\ &+ \int d^3k b_x(\mathbf{k}) \exp \left[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i \frac{kct}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \right] \\ &= \int d^3k [b_x(\mathbf{k})]^* \exp \left[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i \frac{kct}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \right] \\ &+ \int d^3k b_x(\mathbf{k}) \exp \left[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i \frac{kct}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \right] \end{aligned}$$

e, portanto,

$$E_x(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left\{ \int d^3k 2b_x(\mathbf{k}) \exp \left[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i \frac{kct}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \right] \right\}.$$

As funções escalares

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) = \exp \left[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i \frac{kct}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \right]$$

satisfazem a equação de onda para todo $\mathbf{k}$. Dessa forma, definimos

$$\epsilon(\mathbf{k}; \mathbf{r}, t) = \hat{\epsilon}_0(\mathbf{k}) \exp \left[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i \frac{kct}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \right]$$

como as funções vetoriais que formam a base funcional para os campos. Essas funções representam ondas planas, pois, em uma frente de onda, o valor de $\epsilon(\mathbf{k}; \mathbf{r}, t)$ fica fixo e isso ocorre somente quando

$$\exp \left[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \frac{ickt}{\sqrt{\mu\epsilon}} \right]$$

é constante, resultando em uma equação do plano:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \frac{ickt}{\sqrt{\mu\epsilon}} = d,$$

onde d é uma constante.

Aqui, vamos sempre utilizar as funções de onda plana complexas, como acima. Os campos devem ser obtidos tomando as partes reais das combinações lineares de ondas complexas. Por exemplo, escrevemos

$$\epsilon = \hat{\mathbf{x}}E_0 \exp(ik_z z - i\omega t),$$

com E_0 real e $\omega = kc/\sqrt{\mu\epsilon}$. O campo elétrico associado é

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \text{Re}(\epsilon) \\ &= \hat{\mathbf{x}}E_0 \cos(k_z z - \omega t). \end{aligned}$$

E o campo $\mathbf{B}$? Isto é, supondo dado um campo elétrico cuja representação complexa seja

$$\epsilon = \hat{\epsilon}_0 \exp \left[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i \frac{ickt}{\sqrt{\mu\epsilon}} \right],$$

como podemos encontrar o campo $\mathbf{B}$? Primeiro, escrevemos

$$\mathbf{B} = \text{Re}(\beta),$$

onde β é a onda plana magnética dada por

$$\beta = \hat{\epsilon}'_0 \exp \left[i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - i \frac{k'ct}{\sqrt{\mu\epsilon}} \right],$$

já que tanto ϵ como β satisfazem a mesma equação de onda. Com as equações de Maxwell na ausência de fontes, fica óbvio que

$$\mathbf{k}' = \mathbf{k},$$

pois as equações que acoplam ϵ e β devem ser satisfeitas em todo ponto do espaço e em todo instante de tempo. Portanto, calculemos:

$$\nabla \times \epsilon = i\mathbf{k} \times \epsilon$$

e

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = -i\omega\beta,$$

onde, como é usual, definimos

$$\omega = \frac{kc}{\sqrt{\mu\varepsilon}}.$$

Utilizando a Lei de Indução de Faraday, obtemos

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta} &= \frac{c\mathbf{k} \times \boldsymbol{\epsilon}}{\omega} \\ &= \sqrt{\mu\varepsilon}\hat{\mathbf{k}} \times \boldsymbol{\epsilon}.\end{aligned}$$

Analogamente, a Lei de Ampère-Maxwell na ausência de corrente livre fornece

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{\beta} - \frac{\mu\varepsilon}{c} \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}}{\partial t} &= i\mathbf{k} \times \boldsymbol{\beta} + i\frac{\mu\varepsilon}{c}\omega\boldsymbol{\epsilon} \\ &= \mathbf{0},\end{aligned}$$

ou seja,

$$\boldsymbol{\epsilon} = -\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\hat{\mathbf{k}} \times \boldsymbol{\beta}.$$

Assim, vemos que tanto $\boldsymbol{\epsilon}$ como $\boldsymbol{\beta}$ são ortogonais ao vetor de onda $\mathbf{k}$ e entre si. É desnecessário dizer que essa mesma conclusão vale para suas respectivas partes reais, $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$.

Na ausência de cargas livres, a Lei de Gauss dá

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon} &= i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \\ &= 0,\end{aligned}$$

mais uma vez levando à conclusão de que $\boldsymbol{\epsilon}$ é ortogonal a $\mathbf{k}$. O mesmo vale para o divergente de $\boldsymbol{\beta}$:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{\beta} &= i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\beta} \\ &= 0.\end{aligned}$$