

Ainda precisamos calcular $\langle \rho_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle$ e $\langle \mathbf{J}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle$. Vamos supor que haja N cargas em cada molécula do material e, para simplificar sem perder a generalidade, vamos supor também que o material seja uma substância pura, isto é, composto por moléculas idênticas. Seja $\mathbf{s}_n$ a posição da n -ésima molécula, medida com relação a um núcleo atômico específico. Assim, cada carga q_{kn} , da n -ésima molécula fica no ponto $\mathbf{s}_{kn}$, com relação ao vetor posição da molécula, $\mathbf{s}_n$. Isso quer dizer que, com relação à origem do sistema de coordenadas, a posição da carga q_{kn} é dada por $\mathbf{s}_{kn} + \mathbf{s}_n$. Também vamos imaginar que haja cargas livres, q_m , nas posições $\mathbf{r}_m$. Como há movimento dessas cargas todas, todas as posições mencionadas devem ser consideradas como funções do tempo. Assim,

$$\rho_{mic}(\mathbf{r}, t) = \sum_m q_m \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) + \sum_n \sum_k q_{kn} \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{s}_{kn} - \mathbf{s}_n)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \langle \rho_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle &= \int d^3r' f(\mathbf{r}') \rho_{mic}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t) \\ &= \int d^3r' f(\mathbf{r}') \sum_m q_m \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{r}_m) \\ &+ \int d^3r' f(\mathbf{r}') \sum_n \sum_k q_{kn} \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{s}_{kn} - \mathbf{s}_n) \\ &= \sum_m q_m f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) + \sum_n \sum_k q_{kn} f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_{kn} - \mathbf{s}_n). \end{aligned}$$

Tipicamente, $|\mathbf{s}_{kn}|$ é da ordem de alguns angströms apenas e, portanto, $f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_{kn} - \mathbf{s}_n)$ não difere apreciavelmente de $f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n)$. Podemos, portanto, aproximar:

$$f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_{kn} - \mathbf{s}_n) \approx f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n) - \mathbf{s}_{kn} \cdot \nabla f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n) + \frac{1}{2} (\mathbf{s}_{kn} \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n)$$

e, com essa aproximação, obtemos

$$\begin{aligned} \langle \rho_m(\mathbf{r}, t) \rangle &\approx \sum_m q_m f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) + \sum_n \sum_k q_{kn} f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n) - \sum_n \sum_k q_{kn} \mathbf{s}_{kn} \cdot \nabla f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n) \\ &+ \sum_n \sum_k q_{kn} \frac{1}{2} (\mathbf{s}_{kn} \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n) \\ &= \sum_m q_m f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) + \sum_n \sum_k q_{kn} f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n) - \nabla \cdot \sum_n \left(\sum_k q_{kn} \mathbf{s}_{kn} \right) f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n) \\ &+ \frac{1}{6} \sum_n \nabla \cdot \left[\left(3 \sum_k q_{kn} \mathbf{s}_{kn} \mathbf{s}_{kn} \right) \cdot \nabla f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n) \right]. \end{aligned}$$

O dipolo elétrico da n -ésima molécula é

$$\mathbf{p}_n = \sum_k q_{kn} \mathbf{s}_{kn}$$

e definimos também o momento quadrupolar elétrico da n -ésima molécula como

$$\overleftrightarrow{Q}_n \equiv 3 \sum_k q_{kn} \mathbf{s}_{kn} \mathbf{s}_{kn}.$$

Para simplificar nossos cálculos abaixo, suponhamos que

$$\overleftrightarrow{Q}_n = \overleftrightarrow{0},$$

ou seja, que as moléculas do material tenham momento quadrupolar elétrico nulo. A polarização do meio fica, então,

$$\mathbf{P}_{mic}(\mathbf{r}, t) = \sum_n \mathbf{p}_n \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n),$$

já que a n -ésima molécula tem um dipolo instantâneo $\mathbf{p}_n$. Com essas observações, concluímos que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{P}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle &= \left\langle \sum_n \mathbf{p}_n \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n) \right\rangle \\ &= \sum_n \mathbf{p}_n \int d^3 r' f(\mathbf{r}') \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{s}_n) \\ &= \sum_n \mathbf{p}_n f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n) \\ &= \sum_n \left(\sum_k q_{kn} \mathbf{s}_{kn} \right) f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n) \end{aligned}$$

e, reconhecendo essa quantidade na expressão de $\langle \rho_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle$ acima, vem

$$\langle \rho_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle \approx \sum_m q_m f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) + \sum_n \sum_k q_{kn} f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n) - \nabla \cdot \langle \mathbf{P}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle.$$

Supondo que cada molécula seja neutra, temos

$$\sum_k q_{kn} = 0$$

e, conseqüentemente,

$$\langle \rho_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle \approx \sum_m q_m f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) - \nabla \cdot \langle \mathbf{P}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle.$$

A densidade de carga livre é, naturalmente, definida como

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}, t) &\equiv \left\langle \sum_m q_m \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) \right\rangle \\ &= \int d^3 r' f(\mathbf{r}') \sum_m q_m \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{r}_m) \\ &= \sum_m q_m f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) \end{aligned}$$

e, definindo

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \equiv \langle \mathbf{P}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle,$$

podemos escrever

$$\langle \rho_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle \approx \rho(\mathbf{r}, t) - \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}, t),$$

analogamente ao caso eletrostático. A Lei de Gauss macroscópica fica, então,

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{E}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle = 4\pi \langle \rho_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle,$$

isto é,

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 4\pi \rho(\mathbf{r}, t) - 4\pi \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}, t),$$

ou seja,

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = 4\pi \rho(\mathbf{r}, t),$$

onde definimos o vetor deslocamento como

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + 4\pi \mathbf{P}(\mathbf{r}, t).$$

Calculemos, agora, $\langle \mathbf{J}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle$. Da própria definição de $\mathbf{J}_{mic}(\mathbf{r}, t)$ temos

$$\mathbf{J}_{mic}(\mathbf{r}, t) \equiv \rho_{mic}(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}_{mic}(\mathbf{r}, t),$$

onde $\mathbf{v}_{mic}(\mathbf{r}, t)$ é o campo de velocidades das cargas do meio material. Mas, como vimos,

$$\rho_{mic}(\mathbf{r}, t) = \sum_m q_m \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) + \sum_n \sum_k q_{kn} \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{s}_{kn} - \mathbf{s}_n)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{mic}(\mathbf{r}, t) &= \sum_m q_m \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) \mathbf{v}_{mic}(\mathbf{r}, t) + \sum_n \sum_k q_{kn} \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{s}_{kn} - \mathbf{s}_n) \mathbf{v}_{mic}(\mathbf{r}, t) \\ &= \sum_m q_m \dot{\mathbf{r}}_m \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) + \sum_n \sum_k q_{kn} (\dot{\mathbf{s}}_{kn} + \dot{\mathbf{s}}_n) \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{s}_{kn} - \mathbf{s}_n), \end{aligned}$$

onde, por exemplo,

$$\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) \mathbf{v}_{mic}(\mathbf{r}, t) = \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) \mathbf{v}_{mic}(\mathbf{r}_m, t)$$

e o campo de velocidades das cargas calculado exatamente sobre a m -ésima carga livre dá o valor de sua velocidade, ou seja,

$$\mathbf{v}_{mic}(\mathbf{r}_m, t) = \dot{\mathbf{r}}_m,$$

com

$$\dot{\mathbf{r}}_m \equiv \frac{d\mathbf{r}_m}{dt}.$$

Analogamente,

$$\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{s}_{kn} - \mathbf{s}_n) \mathbf{v}_{mic}(\mathbf{r}, t) = \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{s}_{kn} - \mathbf{s}_n) \mathbf{v}_{mic}(\mathbf{s}_{kn} + \mathbf{s}_n, t).$$

Mas o vetor $\mathbf{s}_{kn} + \mathbf{s}_n$ indica a posição da k -ésima carga da n -ésima molécula. Logo, o campo de velocidades das cargas calculado exatamente sobre a posição da k -ésima carga da n -ésima molécula dá sua velocidade, ou seja,

$$\mathbf{v}_{mic}(\mathbf{s}_{kn} + \mathbf{s}_n, t) = \dot{\mathbf{s}}_{kn} + \dot{\mathbf{s}}_n,$$

onde

$$\dot{\mathbf{s}}_{kn} \equiv \frac{d\mathbf{s}_{kn}}{dt}$$

e

$$\dot{\mathbf{s}}_n \equiv \frac{d\mathbf{s}_n}{dt}.$$

Com esses resultados, podemos escrever

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{J}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle &= \int d^3r' f(\mathbf{r}') \mathbf{J}_{mic}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t) \\ &= \sum_m q_m \dot{\mathbf{r}}_m \int d^3r' f(\mathbf{r}') \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{r}_m) \\ &+ \sum_n \sum_k q_{kn} (\dot{\mathbf{s}}_{kn} + \dot{\mathbf{s}}_n) \int d^3r' f(\mathbf{r}') \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{s}_{kn} - \mathbf{s}_n) \\ &= \sum_m q_m \dot{\mathbf{r}}_m f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) + \sum_n \sum_k q_{kn} (\dot{\mathbf{s}}_{kn} + \dot{\mathbf{s}}_n) f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_{kn} - \mathbf{s}_n). \end{aligned}$$

Podemos aproximar, novamente,

$$f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_{kn} - \mathbf{s}_n) \approx f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n) - \mathbf{s}_{kn} \cdot \nabla f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n)$$

e definir, naturalmente, a densidade macroscópica de corrente livre,

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) &\equiv \left\langle \sum_m q_m \dot{\mathbf{r}}_m \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) \right\rangle \\ &= \sum_m q_m \dot{\mathbf{r}}_m \int d^3r' f(\mathbf{r}') \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{r}_m) \\ &= \sum_m q_m \dot{\mathbf{r}}_m f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{J}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle &\approx \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \sum_n \sum_k q_{kn} (\dot{\mathbf{s}}_{kn} + \dot{\mathbf{s}}_n) f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n) \\ &- \sum_n \sum_k q_{kn} (\dot{\mathbf{s}}_{kn} + \dot{\mathbf{s}}_n) \mathbf{s}_{kn} \cdot \nabla f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n). \end{aligned}$$

Como estamos trabalhando agora para obter a equação de Ampère-Maxwell macroscópica, precisamos fazer aparecer, nos resultados acima, o rotacional da magnetização, além da derivada temporal da polarização. A magnetização é dada por

$$\mathbf{M}_{mic}(\mathbf{r}, t) = \sum_n \mathbf{m}_n \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n),$$

onde $\mathbf{m}_n$ é o momento dipolar magnético da n -ésima molécula, definido como

$$\mathbf{m}_n \equiv \frac{1}{2c} \sum_k q_{kn} \mathbf{s}_{kn} \times \dot{\mathbf{s}}_{kn}.$$

Assim, queremos reconhecer, na expressão para $\langle \mathbf{J}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle$, o rotacional de $\langle \mathbf{M}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle$:

$$\begin{aligned} \nabla \times \langle \mathbf{M}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle &= \nabla \times \left\langle \sum_n \mathbf{m}_n \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n) \right\rangle \\ &= \nabla \times \sum_n \mathbf{m}_n f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n) \\ &= - \sum_n \mathbf{m}_n \times \nabla f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n) \\ &= - \frac{1}{2c} \sum_n \sum_k q_{kn} (\mathbf{s}_{kn} \times \dot{\mathbf{s}}_{kn}) \times \nabla f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n) \\ &= - \frac{1}{2c} \sum_n \sum_k q_{kn} \dot{\mathbf{s}}_{kn} \mathbf{s}_{kn} \cdot \nabla f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n) \\ &+ \frac{1}{2c} \sum_n \sum_k q_{kn} \mathbf{s}_{kn} \dot{\mathbf{s}}_{kn} \cdot \nabla f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n). \end{aligned}$$

Como

$$\dot{\mathbf{s}}_{kn} \mathbf{s}_{kn} = -\mathbf{s}_{kn} \dot{\mathbf{s}}_{kn} + \frac{d}{dt}(\mathbf{s}_{kn} \mathbf{s}_{kn}),$$

segue que

$$\begin{aligned} \nabla \times \langle \mathbf{M}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle &= - \frac{1}{2c} \sum_n \left[\sum_k q_{kn} \frac{d}{dt}(\mathbf{s}_{kn} \mathbf{s}_{kn}) \right] \cdot \nabla f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n) \\ &+ \frac{1}{c} \sum_n \sum_k q_{kn} \mathbf{s}_{kn} \dot{\mathbf{s}}_{kn} \cdot \nabla f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n) \\ &= - \frac{1}{6c} \sum_n \left[\frac{d}{dt} (3 \sum_k q_{kn} \mathbf{s}_{kn} \mathbf{s}_{kn}) \right] \cdot \nabla f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n) \\ &+ \frac{1}{c} \sum_n \sum_k q_{kn} \mathbf{s}_{kn} \dot{\mathbf{s}}_{kn} \cdot \nabla f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n) \\ &= - \frac{1}{6c} \sum_n \left(\frac{d \overleftrightarrow{Q}_n}{dt} \right) \cdot \nabla f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n) \\ &+ \frac{1}{c} \sum_n \sum_k q_{kn} \mathbf{s}_{kn} \dot{\mathbf{s}}_{kn} \cdot \nabla f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n). \end{aligned}$$

Mas como estamos supondo que

$$\overleftrightarrow{Q}_n = \overleftrightarrow{0},$$

vem

$$\nabla \times \langle \mathbf{M}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{c} \sum_n \sum_k q_{kn} \mathbf{s}_{kn} \dot{\mathbf{s}}_{kn} \cdot \nabla f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n),$$

que também é equivalente a

$$\nabla \times \langle \mathbf{M}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle = -\frac{1}{c} \sum_n \sum_k q_{kn} \dot{\mathbf{s}}_{kn} \mathbf{s}_{kn} \cdot \nabla f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n),$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{J}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle &\approx \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \sum_n \sum_k q_{kn} (\dot{\mathbf{s}}_{kn} + \dot{\mathbf{s}}_n) f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n) \\ &- \sum_n \sum_k q_{kn} (\dot{\mathbf{s}}_{kn} + \dot{\mathbf{s}}_n) \mathbf{s}_{kn} \cdot \nabla f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n) \\ &= \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \sum_n \sum_k q_{kn} \dot{\mathbf{s}}_{kn} f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n) + \sum_n \sum_k q_{kn} \dot{\mathbf{s}}_n f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n) \\ &- \sum_n \sum_k q_{kn} \dot{\mathbf{s}}_{kn} \mathbf{s}_{kn} \cdot \nabla f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n) - \sum_n \sum_k q_{kn} \dot{\mathbf{s}}_n \mathbf{s}_{kn} \cdot \nabla f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n) \\ &= \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \sum_n \sum_k q_{kn} \dot{\mathbf{s}}_{kn} f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n) + \sum_n \sum_k q_{kn} \dot{\mathbf{s}}_n f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n) \\ &+ c \nabla \times \langle \mathbf{M}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle - \sum_n \sum_k q_{kn} \dot{\mathbf{s}}_n \mathbf{s}_{kn} \cdot \nabla f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n). \end{aligned}$$

Como também estamos supondo que a carga total de cada molécula seja nula, isto é,

$$\sum_k q_{kn} = 0,$$

temos

$$\begin{aligned} \sum_n \sum_k q_{kn} \dot{\mathbf{s}}_n f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n) &= \sum_n \left(\sum_k q_{kn} \right) \dot{\mathbf{s}}_n f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n) \\ &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

implicando que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{J}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle &\approx \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + c \nabla \times \langle \mathbf{M}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle \\ &+ \sum_n \sum_k q_{kn} \dot{\mathbf{s}}_{kn} f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n) - \sum_n \sum_k q_{kn} \dot{\mathbf{s}}_n \mathbf{s}_{kn} \cdot \nabla f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n). \end{aligned}$$

A derivada temporal parcial da polarização é dada por

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{P}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left[\sum_n \sum_k q_{kn} \mathbf{s}_{kn} f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n) \right] \\
&= \sum_n \sum_k q_{kn} \frac{\partial \mathbf{s}_{kn}}{\partial t} f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n) \\
&\quad + \sum_n \sum_k q_{kn} \mathbf{s}_{kn} \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n) \\
&= \sum_n \sum_k q_{kn} \dot{\mathbf{s}}_{kn} f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n) \\
&\quad - \sum_n \sum_k q_{kn} \mathbf{s}_{kn} \dot{\mathbf{s}}_n \cdot \nabla f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n)
\end{aligned}$$

e, dessa forma,

$$\sum_n \sum_k q_{kn} \dot{\mathbf{s}}_{kn} f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n) = \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \sum_n \sum_k q_{kn} \mathbf{s}_{kn} \dot{\mathbf{s}}_n \cdot \nabla f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{J}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle &\approx \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + c \nabla \times \langle \mathbf{M}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle + \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\
&\quad + \sum_n \sum_k q_{kn} [\mathbf{s}_{kn} \dot{\mathbf{s}}_n \cdot \nabla f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n) - \dot{\mathbf{s}}_n \mathbf{s}_{kn} \cdot \nabla f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n)] \\
&= \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + c \nabla \times \langle \mathbf{M}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle + \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\
&\quad + \sum_n \sum_k q_{kn} \nabla \times [(\mathbf{s}_{kn} \times \dot{\mathbf{s}}_n) f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n)] \\
&= \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + c \nabla \times \langle \mathbf{M}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle + \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\
&\quad + \nabla \times \left[\sum_n \sum_k q_{kn} \mathbf{s}_{kn} \times \dot{\mathbf{s}}_n f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n) \right],
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\frac{4\pi}{c} \langle \mathbf{J}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle &\approx \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\
&\quad + 4\pi \nabla \times \left[\langle \mathbf{M}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle + \frac{1}{c} \sum_n \sum_k q_{kn} \mathbf{s}_{kn} \times \dot{\mathbf{s}}_n f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n) \right].
\end{aligned}$$

Comparemos os termos entre colchetes:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{M}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle + \sum_n \sum_k q_{kn} \mathbf{s}_{kn} \times \frac{\dot{\mathbf{s}}_n}{c} f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n) &= \sum_n \mathbf{m}_n f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n) \\
&+ \frac{1}{c} \sum_n \sum_k q_{kn} \mathbf{s}_{kn} \times \dot{\mathbf{s}}_n f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n) \\
&= \frac{1}{2c} \sum_n \sum_k q_{kn} \mathbf{s}_{kn} \times \dot{\mathbf{s}}_{kn} f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n) \\
&+ \frac{1}{c} \left(\sum_n \sum_k q_{kn} \mathbf{s}_{kn} \times \dot{\mathbf{s}}_n \right) f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n).
\end{aligned}$$

Vamos supor também que o material não esteja em movimento, de forma que as velocidades das moléculas, $\dot{\mathbf{s}}_n$, sejam muito menores, em valor absoluto médio, do que as velocidades das cargas em cada molécula, $\dot{\mathbf{s}}_{kn}$, também em valor absoluto médio. Com isso, podemos desprezar o segundo termo da equação acima e escrever

$$\begin{aligned}
\frac{4\pi}{c} \langle \mathbf{J}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle &\approx \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\
&+ 4\pi \nabla \times \langle \mathbf{M}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle.
\end{aligned}$$

A equação de Ampère-Maxwell, então, em média espacial, fica

$$\langle \nabla \times \mathbf{B}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{4\pi}{c} \langle \mathbf{J}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle + \frac{1}{c} \left\langle \frac{\partial \mathbf{E}_{mic}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right\rangle,$$

isto é,

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\
&+ 4\pi \nabla \times \langle \mathbf{M}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t},
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
\nabla \times [\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - 4\pi \langle \mathbf{M}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle] &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \\
&+ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + 4\pi \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)].
\end{aligned}$$

Definindo

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) \equiv \langle \mathbf{M}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle,$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - 4\pi \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$$

e reconhecendo o campo deslocamento elétrico

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + 4\pi \mathbf{P}(\mathbf{r}, t),$$

obtemos

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t},$$

que é a equação de Ampère-Maxwell macroscópica.