

Uma Antena Linear Centralmente Alimentada

Vamos considerar uma antena bem simples, consistindo de duas barras condutoras idênticas, retas e finas, ambas alinhadas ao longo de um eixo que vamos chamar de eixo z , mas com uma pequena separação entre elas, desprezível para nossa finalidade, onde o sinal elétrico é inserido. Vamos adotar a origem do sistema de coordenadas exatamente no centro dessa pequena separação entre as barras. Seja $d/2$ o comprimento de cada uma das barras condutoras. A ideia é supormos que a densidade de corrente elétrica estabelecida ao longo da antena seja simétrica com relação à origem de coordenadas e dependente senoidalmente de z e harmonicamente de t . Assim, vamos tomar a densidade de corrente complexa como

$$\mathbf{J}_c(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{z}} I \delta(x) \delta(y) \sin\left(\frac{kd}{2} - k|z|\right), \text{ para } |z| < \frac{d}{2},$$

sendo nula para $|z| \geq d/2$ e

$$k = \frac{\omega}{c}.$$

As funções de Dirac indicam que a antena é estreita sobre o eixo z . Na zona de radiação,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_c^{\text{rad}}(\mathbf{r}) &= \frac{\exp(ikr)}{rc} \int_V d^3r' \mathbf{J}_c(\mathbf{r}') \exp(-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') \\ &= \frac{\exp(ikr)}{rc} \int_V d^3r' \hat{\mathbf{z}} I \delta(x') \delta(y') \sin\left(\frac{kd}{2} - k|z'|\right) \exp(-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'). \end{aligned}$$

Integrando em x' e y' fornece

$$\mathbf{A}_c^{\text{rad}}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{z}} \frac{I \exp(ikr)}{rc} \int_{-d/2}^{d/2} dz' \sin\left(\frac{kd}{2} - k|z'|\right) \exp(-ikz' \cos \theta),$$

onde θ é o ângulo entre o eixo z e o vetor posição do ponto de observação, $\mathbf{r}$. Calculemos a integral:

$$\begin{aligned} \int_{-d/2}^{+d/2} dz' \sin\left(\frac{kd}{2} - k|z'|\right) \exp(-ikz' \cos \theta) &= \int_{-d/2}^0 dz' \sin\left(\frac{kd}{2} + kz'\right) \exp(-ikz' \cos \theta) \\ &\quad + \int_0^{d/2} dz' \sin\left(\frac{kd}{2} - kz'\right) \exp(-ikz' \cos \theta), \end{aligned}$$

que, com a mudança de variável

$$z' \rightarrow -z'$$

na primeira integral do membro direito, resulta em

$$\begin{aligned} \int_{-d/2}^{+d/2} dz' \sin\left(\frac{kd}{2} - k|z'|\right) \exp(-ikz' \cos \theta) &= \int_0^{d/2} dz' \sin\left(\frac{kd}{2} - kz'\right) \exp(ikz' \cos \theta) \\ &\quad + \int_0^{d/2} dz' \sin\left(\frac{kd}{2} - kz'\right) \exp(-ikz' \cos \theta) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\int_{-d/2}^{+d/2} dz' \sin\left(\frac{kd}{2} - k|z'|\right) \exp(-ikz' \cos \theta) = 2 \int_0^{d/2} dz' \sin\left(\frac{kd}{2} - kz'\right) \cos(kz' \cos \theta).$$

Mas,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\left(\frac{kd}{2} - kz'\right) \cos(kz' \cos \theta) &= \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{kd}{2} - kz' + kz' \cos \theta\right) + \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{kd}{2} - kz' - kz' \cos \theta\right) \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{sen}\left[k(1 + \cos \theta)z' - \frac{kd}{2}\right] - \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left[k(1 - \cos \theta)z' - \frac{kd}{2}\right]\end{aligned}$$

e, assim,

$$\begin{aligned}\int_{-d/2}^{+d/2} dz' \operatorname{sen}\left(\frac{kd}{2} - k|z'|\right) \exp(-ikz' \cos \theta) &= -\int_0^{d/2} dz' \operatorname{sen}\left[k(1 + \cos \theta)z' - \frac{kd}{2}\right] \\ &\quad - \int_0^{d/2} dz' \operatorname{sen}\left[k(1 - \cos \theta)z' - \frac{kd}{2}\right] \\ &= \frac{\cos\left[k(1 + \cos \theta)\frac{d}{2} - \frac{kd}{2}\right] - \cos\left(\frac{kd}{2}\right)}{k(1 + \cos \theta)} \\ &\quad + \frac{\cos\left[k(1 - \cos \theta)\frac{d}{2} - \frac{kd}{2}\right] - \cos\left(\frac{kd}{2}\right)}{k(1 - \cos \theta)}.\end{aligned}$$

Simplificando, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{-d/2}^{+d/2} dz' \operatorname{sen}\left(\frac{kd}{2} - k|z'|\right) \exp(-ikz' \cos \theta) &= \frac{1}{k} \left[\cos\left(\frac{kd}{2} \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{kd}{2}\right) \right] \\ &\quad \times \left[\frac{1}{1 + \cos \theta} + \frac{1}{1 - \cos \theta} \right] \\ &= \frac{2}{k} \left[\frac{\cos\left(\frac{kd}{2} \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{kd}{2}\right)}{\operatorname{sen}^2 \theta} \right].\end{aligned}$$

Logo,

$$\mathbf{A}_c^{\text{rad}}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{z}} \frac{2I \exp(ikr)}{rck} \left[\frac{\cos\left(\frac{kd}{2} \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{kd}{2}\right)}{\operatorname{sen}^2 \theta} \right].$$

Calculemos o campo indução magnética de radiação:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_c(\mathbf{r}) &= \nabla \times \mathbf{A}_c^{\text{rad}}(\mathbf{r}) \\ &= \nabla \times \left\{ \hat{\mathbf{z}} \frac{2I \exp(ikr)}{rck} \left[\frac{\cos\left(\frac{kd}{2} \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{kd}{2}\right)}{\operatorname{sen}^2 \theta} \right] \right\} \\ &= -\hat{\mathbf{z}} \times \nabla \left\{ \frac{2I \exp(ikr)}{rck} \left[\frac{\cos\left(\frac{kd}{2} \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{kd}{2}\right)}{\operatorname{sen}^2 \theta} \right] \right\}.\end{aligned}$$

Como

$$\nabla = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

segue

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_c(\mathbf{r}) &\approx -\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{2I \exp(ikr)}{rck} \left[\frac{\cos\left(\frac{kd}{2} \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{kd}{2}\right)}{\sin^2 \theta} \right] \right\} \\ &\approx -\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{r}} ik \frac{2I \exp(ikr)}{rck} \left[\frac{\cos\left(\frac{kd}{2} \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{kd}{2}\right)}{\sin^2 \theta} \right]\end{aligned}$$

e, como

$$\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{x}} \sin \theta \cos \varphi + \hat{\mathbf{y}} \sin \theta \sin \varphi + \hat{\mathbf{z}} \cos \theta,$$

então

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{r}} &= \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}} \sin \theta \cos \varphi + \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{y}} \sin \theta \sin \varphi + \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{z}} \cos \theta \\ &= \hat{\mathbf{y}} \sin \theta \cos \varphi - \hat{\mathbf{x}} \sin \theta \sin \varphi \\ &= \sin \theta (\hat{\mathbf{y}} \cos \varphi - \hat{\mathbf{x}} \sin \varphi) \\ &= \sin \theta \hat{\boldsymbol{\varphi}}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathbf{B}_c^{\text{rad}}(\mathbf{r}) = -\hat{\boldsymbol{\varphi}} i \frac{2I \exp(ikr)}{rc} \left[\frac{\cos\left(\frac{kd}{2} \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{kd}{2}\right)}{\sin \theta} \right].$$

E o campo elétrico de radiação fica

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_c(\mathbf{r}) &= \frac{i}{k} \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B}_c^{\text{rad}}(\mathbf{r}) \\ &= \frac{i}{k} \boldsymbol{\nabla} \times \left\{ -\hat{\boldsymbol{\varphi}} i \frac{2I \exp(ikr)}{rc} \left[\frac{\cos\left(\frac{kd}{2} \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{kd}{2}\right)}{\sin \theta} \right] \right\}.\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) &= \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta F_\varphi) - \frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi} \right] + \hat{\boldsymbol{\theta}} \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r F_\varphi) \right] \\ &+ \frac{\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r F_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} \right],\end{aligned}$$

para um campo vetorial $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ arbitrário, obtemos

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_c(\mathbf{r}) &= \frac{i}{k} \boldsymbol{\nabla} \times \left\{ -\hat{\boldsymbol{\varphi}} i \frac{2I \exp(ikr)}{rc} \left[\frac{\cos\left(\frac{kd}{2} \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{kd}{2}\right)}{\sin \theta} \right] \right\} \\ &= -\frac{i}{k} \hat{\mathbf{r}} i \frac{2I \exp(ikr)}{r^2 c \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\cos\left(\frac{kd}{2} \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{kd}{2}\right) \right] \\ &+ \frac{i}{k} \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{r} i \frac{2I k \exp(ikr)}{c} \left[\frac{\cos\left(\frac{kd}{2} \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{kd}{2}\right)}{\sin \theta} \right],\end{aligned}$$

isto é,

$$\mathbf{E}_c^{\text{rad}}(\mathbf{r}) = -\frac{i}{k}\hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{2Ik\exp(ikr)}{rc}\left[\frac{\cos\left(\frac{kd}{2}\cos\theta\right)-\cos\left(\frac{kd}{2}\right)}{\sin\theta}\right].$$

A média temporal do vetor de Poynting de radiação é dada por

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{S}^{\text{rad}} \rangle &= \frac{c}{8\pi}\text{Re}\left\{\mathbf{E}_c^{\text{rad}}(\mathbf{r})\times[\mathbf{B}_c^{\text{rad}}(\mathbf{r})]^*\right\} \\ &= \hat{\boldsymbol{\theta}}\times\hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{I^2}{2\pi r^2 c}\left[\frac{\cos\left(\frac{kd}{2}\cos\theta\right)-\cos\left(\frac{kd}{2}\right)}{\sin\theta}\right]^2.\end{aligned}$$

Logo,

$$\langle \mathbf{S}^{\text{rad}} \rangle = \hat{\mathbf{r}}\frac{I^2}{2\pi r^2 c}\left[\frac{\cos\left(\frac{kd}{2}\cos\theta\right)-\cos\left(\frac{kd}{2}\right)}{\sin\theta}\right]^2$$

e a distribuição angular da média temporal da potência irradiada por unidade de área é dada por

$$\begin{aligned}\frac{dP}{d\Omega} &= \hat{\mathbf{r}}\cdot\langle \mathbf{S}^{\text{rad}} \rangle r^2 \\ &= \frac{I^2}{2\pi c}\left[\frac{\cos\left(\frac{kd}{2}\cos\theta\right)-\cos\left(\frac{kd}{2}\right)}{\sin\theta}\right]^2.\end{aligned}$$

As Equações de Maxwell Macroscópicas

Dentro da matéria há moléculas por toda parte. Em cada molécula, há átomos compostos por núcleos positivos orbitados por elétrons negativos. Sobre cada uma dessas minúsculas partículas, se consideradas puntiformes, o campo eletromagnético diverge, assumindo valores infinitos. Mas, nessa afirmação, estamos falando do campo eletromagnético microscópico, que não pode ser medido por uma ponta de prova, que, por sua vez, também é composta por átomos. Precisamos, então, formular uma maneira de tratar o campo eletromagnético dentro da matéria que seria observável através de medições feitas por um aparato macroscópico. No vácuo, as equações de Maxwell são as que já temos considerado:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}_{mic}(\mathbf{r},t) = 4\pi\rho_{mic}(\mathbf{r},t),$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}_{mic}(\mathbf{r},t) = 0,$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}_{mic}(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}_{mic}(\mathbf{r},t)}{\partial t}$$

e

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}_{mic}(\mathbf{r},t) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}_{mic}(\mathbf{r},t) + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}_{mic}(\mathbf{r},t)}{\partial t},$$

onde adicionei o subscrito *mic* para indicar que essas são equações microscópicas. Entre um elétron e um próton, por exemplo, os campos são os microscópicos; não há outro meio senão o vácuo entre eles. O problema é que, para medir

os campos, as cargas e as correntes, utilizamos instrumentos macroscópicos. Não há como medirmos diretamente as grandezas microscópicas. Assim, um aparato macroscópico mede sempre um valor efetivo médio, no espaço e no tempo, das grandezas eletromagnéticas. Vamos, portanto, seguir o livro de J. D. Jackson e fazer uma média espacial das equações acima para deduzir as equações de Maxwell macroscópicas.

Seja $f(\mathbf{r})$ uma função centrada na origem e esfericamente simétrica, mas que se anule exponencialmente para distâncias suficientemente grandes. Por exemplo, como a luz visível não mostra a natureza granular da matéria, mas os raios X mostram, podemos convencionar como o limite macroscópico uma distância típica que divida o âmbito visível do âmbito de raios X, digamos, como Jackson, cerca de $100\text{\AA}$. Isso significa que podemos supor que $f(\mathbf{r})$ se anule para distâncias da ordem de $100\text{\AA}$. As médias espaciais das grandezas eletromagnéticas, então, ficam

$$\langle \mathbf{E}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle = \int d^3 r' f(\mathbf{r}') \mathbf{E}_{mic}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t),$$

$$\langle \mathbf{B}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle = \int d^3 r' f(\mathbf{r}') \mathbf{B}_{mic}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t),$$

$$\langle \rho_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle = \int d^3 r' f(\mathbf{r}') \rho_{mic}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t)$$

e

$$\langle \mathbf{J}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle = \int d^3 r' f(\mathbf{r}') \mathbf{J}_{mic}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t),$$

onde as integrais são sobre todo o espaço. Os campos macroscópicos são definidos como as médias dos respectivos campos microscópicos:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \equiv \langle \mathbf{E}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle$$

e

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \equiv \langle \mathbf{B}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle,$$

onde as quantidades macroscópicas não têm o subscrito *mic*.

Agora, tomando as médias das equações de Maxwell microscópicas, obtemos

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{E}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle = 4\pi \langle \rho_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle,$$

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{B}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle = 0,$$

$$\langle \nabla \times \mathbf{E}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle = -\frac{1}{c} \left\langle \frac{\partial \mathbf{B}_{mic}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right\rangle$$

e

$$\langle \nabla \times \mathbf{B}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{4\pi}{c} \langle \mathbf{J}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle + \frac{1}{c} \left\langle \frac{\partial \mathbf{E}_{mic}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right\rangle.$$

No entanto,

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{E}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle = \nabla \cdot \langle \mathbf{E}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle,$$

pois, como ∇ opera apenas sobre $\mathbf{r}$ e não sobre $\mathbf{r}'$,

$$\begin{aligned} \langle \nabla \cdot \mathbf{E}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle &= \int d^3 r' f(\mathbf{r}') \nabla \cdot \mathbf{E}_{mic}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t) \\ &= \nabla \cdot \int d^3 r' f(\mathbf{r}') \mathbf{E}_{mic}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t) \\ &= \nabla \cdot \langle \mathbf{E}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle \\ &= \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \end{aligned}$$

De maneira análoga, também temos

$$\begin{aligned} \langle \nabla \times \mathbf{E}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle &= \nabla \times \langle \mathbf{E}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle \\ &= \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \\ \langle \nabla \cdot \mathbf{B}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle &= \nabla \cdot \langle \mathbf{B}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle \\ &= \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \langle \nabla \times \mathbf{B}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle &= \nabla \times \langle \mathbf{B}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle \\ &= \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t). \end{aligned}$$

Como a derivada parcial com relação ao tempo não opera sobre $\mathbf{r}$ e nem sobre $\mathbf{r}'$, segue que

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \mathbf{E}_{mic}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right\rangle &= \int d^3 r' f(\mathbf{r}') \frac{\partial \mathbf{E}_{mic}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t)}{\partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int d^3 r' f(\mathbf{r}') \mathbf{E}_{mic}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{E}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle \\ &= \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \mathbf{B}_{mic}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right\rangle &= \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{B}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle \\ &= \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \end{aligned}$$

Assim, as duas equações macroscópicas homogêneas de Maxwell já estão deduzidas:

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$$

e

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}.$$