

Agora podemos calcular o vetor de Poynting:

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_{\text{rad}} &= \frac{c}{4\pi} \mathbf{E}_{\text{rad}} \times \mathbf{B}_{\text{rad}} \\
&\approx \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\hat{\mathbf{r}} \times [\hat{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{p}}(t - \frac{r}{c})]}{rc^2} \right\} \times \left[\frac{\ddot{\mathbf{p}}(t - \frac{r}{c}) \times \hat{\mathbf{r}}}{rc} \right] \\
&= \frac{\hat{\mathbf{r}}}{4\pi} \frac{[\hat{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{p}}(t - \frac{r}{c})]^2}{r^2 c^3}.
\end{aligned}$$

A distribuição angular da potência irradiada pode ser obtida da expressão

$$r^2 \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{S}_{\text{rad}} d\Omega = \frac{d\Omega}{4\pi c^3} \left[\hat{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right]^2.$$

Finalmente, integrando sobre todas as direções do espaço, temos a potência total emitida pela distribuição, ou seja,

$$\begin{aligned}
P_{\text{rad}} &= \frac{1}{4\pi c^3} \int_{\Omega=4\pi} d\Omega \left[\hat{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right]^2 \\
&= \frac{2\pi}{4\pi c^3} \int_0^\pi d\theta \sin^3 \theta \left| \ddot{\mathbf{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right|^2,
\end{aligned}$$

onde escolhemos o eixo z ao longo do sentido de $\ddot{\mathbf{p}}(t - \frac{r}{c})$. Logo,

$$P_{\text{rad}} = \frac{1}{2c^3} \left| \ddot{\mathbf{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right|^2 \int_{-1}^{+1} du (1 - u^2),$$

onde fizemos

$$u = \cos \theta.$$

Como

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 du (1 - u^2) &= \left[u - \frac{u^3}{3} \right]_{-1}^{+1} \\
&= 2 - \frac{2}{3} \\
&= \frac{4}{3},
\end{aligned}$$

segue

$$\begin{aligned}
P_{\text{rad}} &= \frac{2}{3c^3} \left| \ddot{\mathbf{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right|^2 \\
&= \frac{2}{3c^3} \left| \ddot{\mathbf{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right|^2.
\end{aligned}$$

Em particular, para uma só carga pontual, com trajetória dada por $\mathbf{r}(t)$, o momento dipolar elétrico é dado por

$$\mathbf{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) = q \mathbf{r} \left(t - \frac{r}{c} \right)$$

e, portanto,

$$P_{\text{rad}} = \frac{2q^2}{3c^3} \left| \ddot{\mathbf{r}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right|^2,$$

ou seja, a potência total irradiada por uma partícula é proporcional ao quadrado da aceleração. Essa é a chamada fórmula de Larmor.

Radiação de fontes localizadas harmonicamente oscilantes

Quando a densidade de carga e a densidade de corrente variam no tempo, podemos escrevê-las como uma superposição contínua de componentes de Fourier. Vamos, portanto, considerar apenas uma dessas componentes monocromáticas e escrever

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \text{Re} [\rho_c(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)]$$

e

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} [\mathbf{J}_c(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)].$$

Na ausência de fronteiras, isto é, no espaço livre, o potencial vetorial no calibre de Lorentz é dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c} \int_V d^3r' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{1}{c} \int_V d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \text{Re} \left\{ \mathbf{J}_c(\mathbf{r}') \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \right) \right] \right\} \\ &= \text{Re} \left\{ \frac{1}{c} \int_V d^3r' \frac{\mathbf{J}_c(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \right) \right] \right\}, \end{aligned}$$

onde V é a região do espaço limitada onde a densidade de corrente não se anula. Podemos, portanto, escrever o potencial vetorial como

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \{ \mathbf{A}_c(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) \},$$

onde

$$\mathbf{A}_c(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int_V d^3r' \frac{\mathbf{J}_c(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \exp \left(i\frac{\omega}{c} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \right).$$

Com isso, o campo $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ escreve-se

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \\ &= \nabla \times \text{Re} \{ \mathbf{A}_c(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) \} \\ &= \text{Re} \{ [\nabla \times \mathbf{A}_c(\mathbf{r})] \exp(-i\omega t) \} \\ &= \text{Re} \{ \mathbf{B}_c(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) \}, \end{aligned}$$

onde

$$\mathbf{B}_c(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}_c(\mathbf{r}).$$

Da Lei de Ampère-Maxwell segue que

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t},$$

considerando que o meio seja o vácuo e que não há correntes elétricas no ponto em que calculamos $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= c \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \\ &= c \nabla \times \operatorname{Re} \{ \mathbf{B}_c(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) \} \\ &= \operatorname{Re} \{ c [\nabla \times \mathbf{B}_c(\mathbf{r})] \exp(-i\omega t) \} \end{aligned}$$

e, usando o ansatz

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} \{ \mathbf{E}_c(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) \},$$

obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Re} \{ \mathbf{E}_c(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) \} = \operatorname{Re} \{ c [\nabla \times \mathbf{B}_c(\mathbf{r})] \exp(-i\omega t) \},$$

isto é,

$$\operatorname{Re} \{ -i\omega \mathbf{E}_c(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) \} = \operatorname{Re} \{ c [\nabla \times \mathbf{B}_c(\mathbf{r})] \exp(-i\omega t) \}.$$

Como essa igualdade deve ser válida para todo t , segue que

$$\mathbf{E}_c(\mathbf{r}) = i \frac{c}{\omega} \nabla \times \mathbf{B}_c(\mathbf{r}).$$

A partir de agora, portanto, podemos nos concentrar apenas no estudo do potencial vetorial complexo, isto é,

$$\mathbf{A}_c(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int_V d^3 r' \frac{\mathbf{J}_c(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \exp\left(i \frac{\omega}{c} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\right),$$

já que os campos podem ser obtidos através desse potencial vetorial complexo, pois

$$\mathbf{B}_c(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}_c(\mathbf{r})$$

e

$$\mathbf{E}_c(\mathbf{r}) = \frac{i}{k} \nabla \times \mathbf{B}_c(\mathbf{r}),$$

onde definimos, por conveniência,

$$k = \frac{\omega}{c}.$$

O comprimento de onda da radiação é dado por

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{2\pi}{k} \\ &= \frac{2\pi c}{\omega}. \end{aligned}$$

Em termos da distância à fonte dos campos, $r = |\mathbf{r}|$, e do comprimento característico da fonte localizada, d , há três regiões espaciais de interesse: a zona próxima ou estática, quando

$$d \ll r \ll \lambda,$$

a zona intermediária, quando

$$d \ll r \sim \lambda,$$

e a zona distante ou de radiação, quando

$$d \ll \lambda \ll r.$$

Aqui abordaremos apenas a zona de radiação. Em geral, os campos elétrico e indução magnética têm termos proporcionais a todas as potências positivas de r^{-1} . No entanto, em uma esfera infinitamente distante da fonte, somente os termos dos campos proporcionais a r^{-1} contribuem com uma energia não nula, como podemos ver pela integral do vetor de Poynting sobre essa superfície. Um elemento de área da superfície é proporcional a r^2 e, portanto, somente os termos dos campos elétrico e indução magnética proporcionais a r^{-1} contribuem com outro fator r^2 no denominador do integrando para cancelar aquele do numerador. As contribuições dos termos de potências de r^{-1} superiores não contribuem para o fluxo do vetor de Poynting sobre a superfície esférica no infinito. É por essa razão que os termos dos campos proporcionais a r^{-1} são definidos como os campos de radiação.

Na integral que dá $\mathbf{A}_c(\mathbf{r})$, vemos que a densidade de corrente, $\mathbf{J}_c(\mathbf{r}')$, só não é nula em uma região tal que

$$r' = |\mathbf{r}'| \lesssim d,$$

de forma que, na zona de radiação,

$$r' \ll \lambda \ll r.$$

Com essa hipótese, podemos escrever

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| &= r \sqrt{1 - 2 \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \left(\frac{\mathbf{r}'}{r} \right) + \left(\frac{r'}{r} \right)^2} \\ &= r \left\{ 1 - \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \left(\frac{\mathbf{r}'}{r} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{r'}{r} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2} \right) \left[-2 \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \left(\frac{\mathbf{r}'}{r} \right) + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \right]^2 + \dots \right\} \\ &= r - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}' + r \frac{1}{2} \left(\frac{r'}{r} \right)^2 - r \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{r} \right)^2 + \dots \\ &= r - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}' + r' \left[\frac{1 - (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}')^2}{2} \left(\frac{r'}{r} \right) + \dots \right], \end{aligned}$$

onde

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

e

$$\hat{\mathbf{r}}' = \frac{\mathbf{r}'}{r'}.$$

Logo, podemos aproximar:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx r - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'$$

e, assim,

$$\mathbf{A}_c(\mathbf{r}) \approx \frac{\exp(ikr)}{c} \int_V d^3r' \frac{\mathbf{J}_c(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \exp(-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}').$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{1}{r} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[-2\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \left(\frac{\mathbf{r}'}{r}\right) + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \right] + \frac{3}{2} \left[\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \left(\frac{\mathbf{r}'}{r}\right) \right]^2 \right\} + \dots \\ &= \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} - \frac{1}{2} \frac{(r')^2}{r^3} + \frac{3}{2} \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2}{r^5} + \dots, \end{aligned}$$

aproximamos:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \approx \frac{1}{r}$$

na integral acima e obtemos

$$\mathbf{A}_c(\mathbf{r}) \approx \frac{\exp(ikr)}{rc} \int_V d^3r' \mathbf{J}_c(\mathbf{r}') \exp(-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}').$$

Como r' é da ordem de d , na zona de radiação temos

$$d \ll \lambda,$$

isto é,

$$\begin{aligned} r' &\ll \lambda \\ &= \frac{2\pi}{k} \end{aligned}$$

e, portanto, podemos impor

$$kr' \ll 1.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \exp(-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}')^n}{n!} \\ &\approx 1 - ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}' \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_c(\mathbf{r}) &\approx \frac{\exp(ikr)}{rc} \int_V d^3r' \mathbf{J}_c(\mathbf{r}') \\ &\quad - ik \frac{\exp(ikr)}{rc} \int_V d^3r' (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{J}_c(\mathbf{r}'). \end{aligned}$$

Radiação de Dipolo Elétrico ou Radiação Dipolar Elétrica

Considerando apenas a zona de radiação, obtivemos uma expansão aproximada para o potencial vetorial, supondo que o número de onda multiplicado pelo tamanho característico da distribuição localizada de corrente era muito menor do que a unidade:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_c(\mathbf{r}) &\approx \frac{\exp(ikr)}{rc} \int_V d^3r' \mathbf{J}_c(\mathbf{r}') \\ &- ik \frac{\exp(ikr)}{rc} \int_V d^3r' (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{J}_c(\mathbf{r}').\end{aligned}$$

Quando consideramos apenas o primeiro termo da expansão acima,

$$\mathbf{A}_{DE}(\mathbf{r}) = \frac{\exp(ikr)}{rc} \int_V d^3r' \mathbf{J}_c(\mathbf{r}').$$

Da equação da continuidade temos

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t}.$$

Como

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\mathbf{J}_c(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)]$$

e, analogamente,

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\rho_c(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)],$$

a equação da continuidade fornece

$$\nabla' \cdot \mathbf{J}_c(\mathbf{r}') = i\omega \rho_c(\mathbf{r}').$$

No entanto, no integrando da integral que dá $\mathbf{A}_{DE}(\mathbf{r})$ aparece apenas $\mathbf{J}_c(\mathbf{r}')$, ao invés de $\nabla' \cdot \mathbf{J}_c(\mathbf{r}')$. Para resolver isso, consideremos:

$$\mathbf{J}_c(\mathbf{r}') = \hat{\mathbf{x}}_i \hat{\mathbf{x}}_i \cdot \mathbf{J}_c(\mathbf{r}'),$$

onde estamos usando a convenção de Einstein para somas. Assim, como

$$\nabla' x'_i = \hat{\mathbf{x}}_i,$$

segue que

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_c(\mathbf{r}') &= \hat{\mathbf{x}}_i (\nabla' x'_i) \cdot \mathbf{J}_c(\mathbf{r}') \\ &= \hat{\mathbf{x}}_i \nabla' \cdot [x'_i \mathbf{J}_c(\mathbf{r}')] - \hat{\mathbf{x}}_i x'_i \nabla' \cdot \mathbf{J}_c(\mathbf{r}') \\ &= \hat{\mathbf{x}}_i \nabla' \cdot [x'_i \mathbf{J}_c(\mathbf{r}')] - \mathbf{r}' \nabla' \cdot \mathbf{J}_c(\mathbf{r}').\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathbf{A}_{DE}(\mathbf{r}) = \frac{\exp(ikr)}{rc} \hat{\mathbf{x}}_i \int_V d^3r' \nabla' \cdot [x'_i \mathbf{J}_c(\mathbf{r}')] - \frac{\exp(ikr)}{rc} \int_V d^3r' \mathbf{r}' \nabla' \cdot \mathbf{J}_c(\mathbf{r}').$$

Pelo Teorema da Divergência de Gauss, a primeira das integrais volumétricas pode ser transformada em uma integral na superfície $S(V)$, fronteira de V :

$$\int_V d^3r' \nabla' \cdot [x'_i \mathbf{J}_c(\mathbf{r}')] = \oint_{S(V)} da' x'_i \hat{\mathbf{n}}' \cdot \mathbf{J}_c(\mathbf{r}').$$

Na superfície, fronteira da região onde a densidade de corrente não é nula, porque envolve toda essa região,

$$\hat{\mathbf{n}}' \cdot \mathbf{J}_c(\mathbf{r}')|_{S(V)} = 0,$$

pois, se a densidade de corrente tivesse uma componente normal à fronteira, então, por continuidade, haveria corrente através da fronteira, o que contradiziria a hipótese de a superfície ser a fronteira da região onde a densidade de corrente não se anula. Logo, na aproximação dipolar elétrica,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{DE}(\mathbf{r}) &= -\frac{\exp(ikr)}{rc} \int_V d^3r' \mathbf{r}' \nabla' \cdot \mathbf{J}_c(\mathbf{r}') \\ &= -\frac{i\omega \exp(ikr)}{rc} \int_V d^3r' \mathbf{r}' \rho_c(\mathbf{r}'), \end{aligned}$$

isto é,

$$\mathbf{A}_{DE}(\mathbf{r}) = -ik \frac{\exp(ikr)}{r} \mathbf{p}_c,$$

onde, como acima,

$$k = \frac{\omega}{c}$$

e definimos o momento de dipolo elétrico complexo como

$$\mathbf{p}_c = \int_V d^3r' \mathbf{r}' \rho_c(\mathbf{r}').$$

Os campos de radiação

O campo indução magnética complexo de radiação pode ser obtido a partir de $\mathbf{A}_{DE}(\mathbf{r})$, na aproximação de dipolo elétrico, através da equação

$$\mathbf{B}_{DE}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}_{DE}(\mathbf{r})$$

e desprezando termos que não sejam proporcionais a r^{-1} . Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{DE}(\mathbf{r}) &= -ik \nabla \times \left[\frac{\exp(ikr)}{r} \mathbf{p}_c \right] \\ &= ik \mathbf{p}_c \times \nabla \left[\frac{\exp(ikr)}{r} \right] \\ &= ik \mathbf{p}_c \times \hat{\mathbf{r}} \left[ik \frac{\exp(ikr)}{r} - \frac{\exp(ikr)}{r^2} \right] \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\mathbf{B}_{DE}^{\text{rad}}(\mathbf{r}) = k^2 \frac{\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}_c}{r} \exp(ikr).$$

Da Lei de Ampère-Maxwell, podemos escrever

$$\nabla \times \mathbf{B}_{DE}(\mathbf{r}) = -ik\mathbf{E}_{DE}(\mathbf{r}),$$

ou seja,

$$\mathbf{E}_{DE}(\mathbf{r}) = \frac{i}{k} \nabla \times \mathbf{B}_{DE}(\mathbf{r})$$

e, assim, o campo elétrico de radiação fica

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{DE}^{\text{rad}}(\mathbf{r}) &= \frac{i}{k} \nabla \times \mathbf{B}_{DE}^{\text{rad}}(\mathbf{r}) \\ &= ik \nabla \times \left[\frac{\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}_c}{r} \exp(ikr) \right] \\ &= ik \nabla \times \left[\frac{\mathbf{r} \times \mathbf{p}_c}{r^2} \exp(ikr) \right] \\ &\approx ik \frac{1}{r^2} \nabla \times [\mathbf{r} \times \mathbf{p}_c \exp(ikr)] \\ &= ik \frac{\exp(ikr)}{r^2} \nabla \times (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_c) + ik \frac{1}{r^2} [\nabla \exp(ikr)] \times (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_c) \\ &= ik \frac{\exp(ikr)}{r^2} \nabla \times (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_c) - k^2 \frac{\exp(ikr)}{r} \hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}_c). \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_c) &= \hat{\mathbf{x}}_l \varepsilon_{lmn} \partial_m [\varepsilon_{npq} x_p (\mathbf{p}_c)_q] \\ &= \hat{\mathbf{x}}_l \varepsilon_{lmn} \varepsilon_{npq} \delta_{mp} (\mathbf{p}_c)_q \\ &= \hat{\mathbf{x}}_l \varepsilon_{lmn} \varepsilon_{nmq} (\mathbf{p}_c)_q \\ &= \hat{\mathbf{x}}_l (\delta_{lm} \delta_{mq} - \delta_{lq} \delta_{mm}) (\mathbf{p}_c)_q \\ &= \hat{\mathbf{x}}_l \delta_{lm} \delta_{mq} (\mathbf{p}_c)_q - \hat{\mathbf{x}}_l \delta_{lq} \delta_{mm} (\mathbf{p}_c)_q \\ &= \mathbf{p}_c - 3\mathbf{p}_c \\ &= -2\mathbf{p}_c. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{DE}^{\text{rad}}(\mathbf{r}) &= -2ik \frac{\exp(ikr)}{r^2} \mathbf{p}_c - k^2 \frac{\exp(ikr)}{r} \hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}_c). \\ &\approx -k^2 \frac{\exp(ikr)}{r} \hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}_c), \end{aligned}$$

onde desprezamos o termo proporcional a r^{-2} . Definimos o campo de radiação dipolar elétrica como

$$\mathbf{E}_{DE}^{\text{rad}}(\mathbf{r}) = -k^2 \frac{\exp(ikr)}{r} \hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}_c)$$

$$\begin{aligned}
&= \left[k^2 \frac{1}{r} (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}_c) \exp(ikr) \right] \times \hat{\mathbf{r}} \\
&= \left[k^2 \frac{1}{r} (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}_c) \exp(ikr) \right] \times \hat{\mathbf{r}} \\
&= \mathbf{B}_{DE}^{\text{rad}}(\mathbf{r}) \times \hat{\mathbf{r}}.
\end{aligned}$$